

## **ОТ СЛУЧАЯ КОВАЛЕВСКОЙ К ДИНАМИКЕ СПУТНИКА НА ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ОРБИТЕ**

© 2025 г. Дорошин А.В.<sup>1,\*</sup>, Асланов В.С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Самарский национальный исследовательский университет имени  
академика С.П. Королёва, Самара, Россия*

\**e-mail: [doran@inbox.ru](mailto:doran@inbox.ru)*

Поступила в редакцию 06.03.2025 г.

После доработки 10.04.2025 г.

Принята к публикации 20.04.2025 г.

В статье предлагается наглядная иллюстрация динамики тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае С.В. Ковалевской, которая возникает в рамках прикладных задач космического полета. Движение твердого тела в случае С.В. Ковалевской эквивалентно движению намагниченного спутника вокруг собственного центра масс в геомагнитном поле на экваториальных круговых орбитах. Рассматриваются вопросы динамики возмущенного углового движения спутника при небольших нарушениях условий случая С.В. Ковалевской, включающих малую инерционно-массовую асимметрию, а также малые периодические возмущения величины магнитного момента, описывающие слабую эллиптичность и/или неэкваториальность спутниковых орбит, либо малые возмущения собственного дипольного магнитного момента спутника, формируемого системой управления угловым движением.

*Ключевые слова: тяжелое твердое тело, случай С.В. Ковалевской, намагниченный спутник, экваториальные круговые орбиты, возмущенное движение в геомагнитном поле*

## 1 Введение

В 1889 году в ведущем математическом журнале Европы “Acta mathematica” была опубликована выдающаяся работа Софьи Васильевны Ковалевской, посвященная открытию третьего общего случая интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [1], заслужившая годом ранее премию Бордена Парижской академии наук. Найденный С.В. Ковалевской новый случай интегрируемости является в своем роде образцом аналитического исследования и сводится к обращению ультраэллиптических интегралов, что в деталях описывается в известных монографиях Голубева В.В. [2] и Архангельского Ю.А. [3].

Решенная С.В. Ковалевской задача в дальнейшем создала основу огромному количеству исследований, выполняемых в разных постановках, включая изучение свойств инвариантных торов и ввод переменных действия [4, 5], разнообразные обобщения, в т.ч. описание вращения многомерного твердого тела в многоскращенных однородных полях [6], бифуркационный анализ [7, 8], расширение случая на динамику гироскатов [9, 10], а также многие другие аспекты.

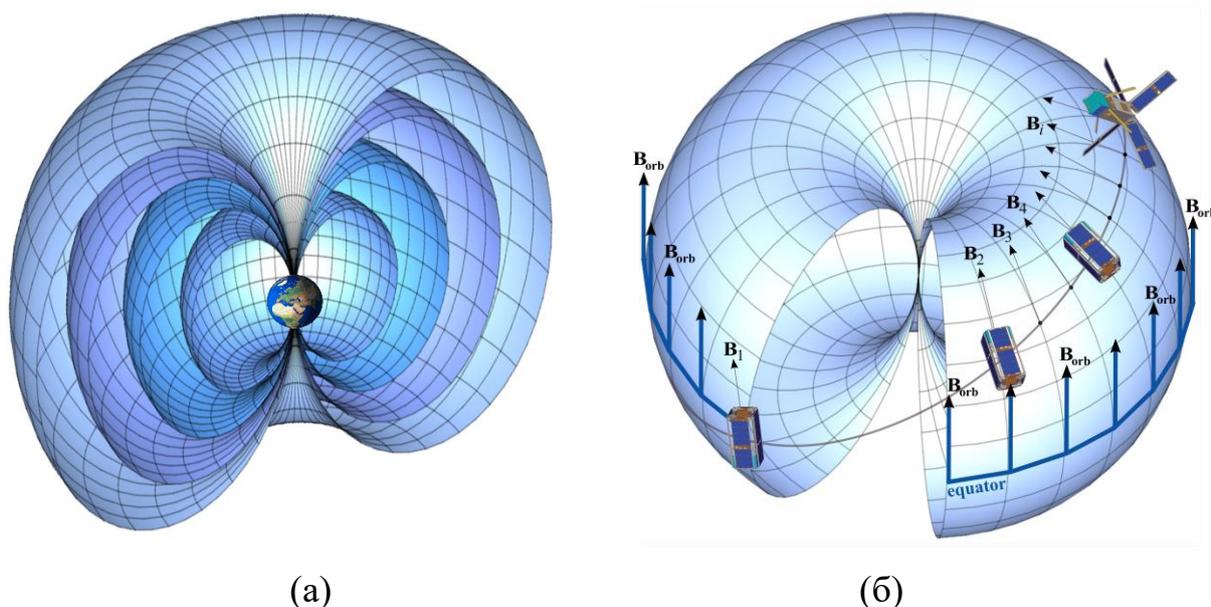
Вместе с тем, нельзя не отметить, что обратной стороной высочайшего по качеству аналитического описания и многоаспектного развития случая С.В. Ковалевской остается довольно слабая проработка его прикладного использования и фактическое отсутствие сколь-нибудь прозрачной связи с динамикой реальных технических систем. Обобщенная возможность подобной связи классической динамики твердого тела с движением неких физически возможных реализаций твердотельных систем хорошо известна [11] – это гипотетическое движение твердых тел с распределенным электрическим зарядом в идеальной несжимаемой жидкости при наличии постоянных гравитационного и электрического полей, а также движение намагниченного тела в постоянном магнитном поле. Однако, в рамках указанной физической интерпретации все-таки не проявлен какой-то конкретный прикладной пример, дающий явное представление о соответствии случая движения С.В. Ковалевской с динамикой реального технического объекта.

Именно эта задача выявления физически ясной реализации случая С.В. Ковалевской в рамках задач динамики космического полета и решается в настоящей статье. Как будет продемонстрировано ниже, имеется полная аналогия случая С.В. Ковалевской угловому движению малого космического аппарата (КА) с простейшей магнитной системой управления на экваториальных круговых орбитах. Эта прикладная иллюстрация уравнивает классический случай С.В. Ковалевской с подобными астродинамическими иллюстрациями случаев Эйлера (свободное

неуправляемое угловое движение искусственного спутника или астероида вокруг центра масс) и Лагранжа (угловое движение симметричного КА при выполнении спуска в атмосфере планеты).

## 2 Условия движения и соответствие математических моделей

В этом пункте будут рассмотрены математические модели углового движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае С.В. Ковалевской, а также углового движения намагниченного спутника вокруг центра масс, движущегося по экваториальной круговой орбите. Прежде всего, рассмотрим предельно идеализированное представление о геомагнитном поле, когда оно имеет чистую структуру прямого диполя. В этом случае мы можем рассматривать силовые поверхности индуцированного магнитного поля симметричными как по линии формирования земного диполя (север-юг), так и относительно экваториального сечения Земли (фиг.1-а). Другими словами, сечение этих силовых поверхностей экваториальной плоскостью дает идеализированную линию уровня поля в виде окружности, и при этом соответствующий вектор магнитной индукции поля будет всегда ортогонален плоскости окружности. В этом случае можно считать, что при движении спутника вдоль круговых экваториальных орбит вектор геомагнитной индукции  $\mathbf{B}_{orb}$  не меняется (фиг.1-б), что позволяет в этих случаях использовать модель постоянного магнитного поля. В отличие от экваториальных орбит, любая иная орбита независимо от своего эксцентриситета будет соответствовать переменному магнитному полю, так как вектор геомагнитной индукции будет изменяться (фиг.1-б) и в разных точках орбиты будет разным ( $\mathbf{B}=\mathbf{B}_i=\mathbf{var}$ ).



Фиг.1. Структура идеального геомагнитного поля и изменение вектора магнитной индукции вдоль спутниковых орбит

Классическая математическая модель движения тяжелого твердого тела с весом  $P$  вокруг неподвижной точки  $O$  включает динамические уравнения Эйлера и кинематическую систему Пуассона для направляющих косинусов  $\{\gamma_i\}$  единичного вектора «вертикальной» инерциальной оси  $\mathbf{e}_z$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}; \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad \mathbf{I} = \text{diag}[A, B, C]; \quad \boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T; \\ \mathbf{M} &= -P\mathbf{r} \times \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{r} = [a, b, c]^T; \quad \mathbf{e}_z = \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Механическая схема движения в условиях случая С.В. Ковалевской, накладываемых на моменты инерции ( $A=B=2C$ ) и координаты центра тяжести ( $b=c=0$ ), представлена на рисунке (фиг.2-а).

Уравнения углового движения намагниченного КА с собственным дипольным моментом  $\mathbf{m}$ , генерируемым магнитными катушками системы управления движением, в геомагнитном поле имеют ту же самую структуру (1) с моментом магнитных сил

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

Если рассматривать угловое движение динамически симметричного космического аппарата, находящегося на круговой экваториальной орбите с соответствующим постоянным «вертикальным» вектором геомагнитной индукции  $\mathbf{B}_{orb}$ , при наложении на моменты инерции условий С.В. Ковалевской и с генерируемым вдоль связанной оси  $Sx$  постоянным дипольным магнитным моментом (фиг.2-б), то будет выполняться полная симметрия уравнений его движения по сравнению с твердым телом в случае С.В. Ковалевской:

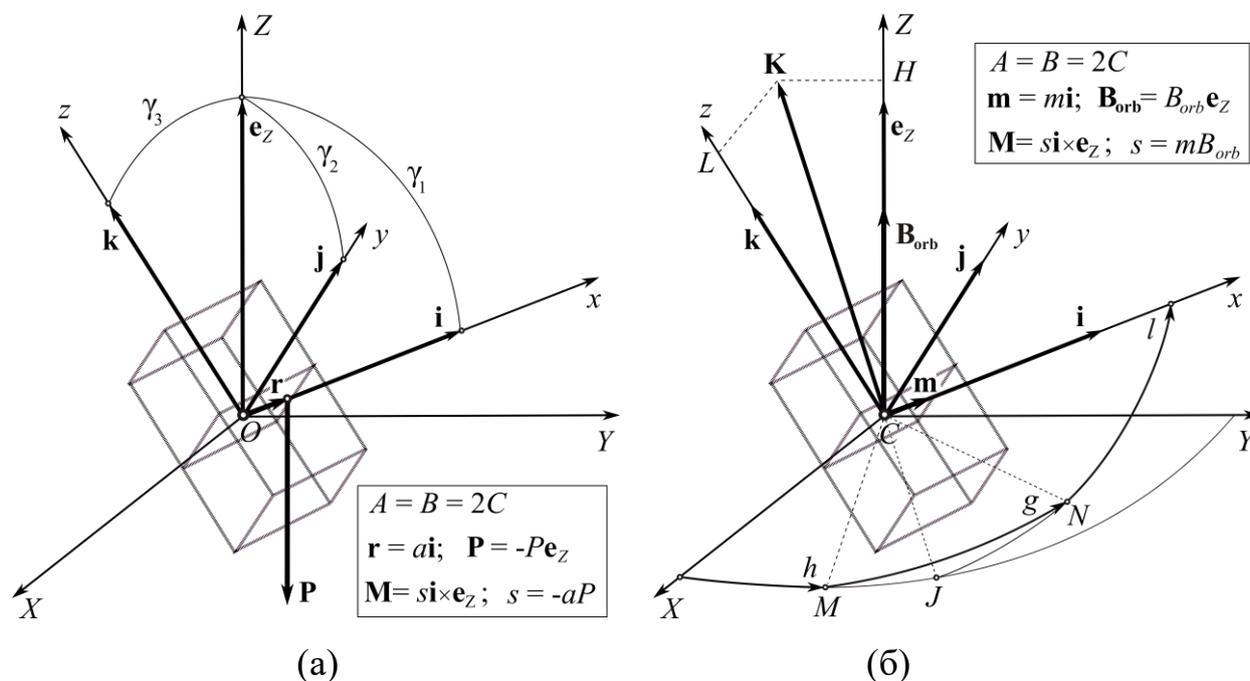
$$A\dot{p} - \frac{A}{2}qr = 0; \quad A\dot{q} + \frac{A}{2}rp = -s\gamma_3; \quad \frac{A}{2}\dot{r} = s\gamma_2, \quad (4)$$

где для величины момента сил введено объединяющее указанные случаи обозначение:

$$s = -aP = mB_{orb}. \quad (5)$$

Стоит отметить, что инерционно-массовая компоновка твердого тела в случае С.В. Ковалевской весьма характерна для малых модульных КА, в особенности с двумя модулями, а постоянный дипольный момент спутника может быть также сформирован обычным постоянным магнитом, размещенным вдоль экваториальной оси.

Собственно, предложенная иллюстрация полной аналогии динамики тела в случае С.В. Ковалевской и намагниченного КА/спутника на экваториальной круговой орбите и представляет собой главный результат настоящей статьи.



Фиг.2. Динамические условия реализации движения тяжелого твердого тела в случае С.В. Ковалевской (а) и аналогичные им условия движения намагниченного спутника на экваториальных круговых орбитах в геомагнитном поле с постоянной индукцией  $\mathbf{B}_{orb}$  (б)

Необходимо отметить, что определяющим обстоятельством для интегрируемости случая С.В. Ковалевской является полученный ей первый интеграл, который с учетом найденной аналогии распространяется теперь и на динамику намагниченного КА, движущегося в соответствующих условиях:

$$\left(p^2 - q^2 - \frac{s}{C}\gamma_1\right)^2 + \left(2pq - \frac{s}{C}\gamma_2\right)^2 = \text{const} \quad (6)$$

### 3 Гамильтонова форма уравнений, сечения Пуанкаре и исследование фазового пространства невозмущенного случая

Важной задачей анализа случая С.В. Ковалевской и намагниченного КА на экваториальной круговой орбите является нахождение ясной интерпретации и геометрической наглядной визуализации движения для качественного анализа возможных режимов. В этих целях в настоящем пункте осуществляется запись канонических уравнений в переменных

Андуайе-Депри и выполняются сечения Пуанкаре, дающие полную информацию о структуре фазового портрета.

Переменные Андуайе-Депри [3] представляют собой углы  $(h, g, l)$  и канонические импульсы, соответствующие проекциям кинетического момента на главные направления  $(H, G, L)$ : на «вертикальную» инерциальную ось  $Z$ , на направление вектора кинетического момента и на продольную связанную с телом ось  $z$  (фиг.2-б). Потенциальная энергия в рассматриваемом случае вычисляется следующим образом:

$$P = -\int |\mathbf{m}||\mathbf{B}_{orb}| \sin \vartheta d\vartheta = |\mathbf{m}||\mathbf{B}_{orb}| \cos \vartheta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{orb} = mB_{orb}\gamma_1 = s\gamma_1 \quad (7)$$

где угол  $\vartheta = \angle\{\mathbf{m}, \mathbf{B}_{orb}\}$ . Тогда гамильтониан системы запишется в следующей форме:

$$\mathcal{H} = \frac{G^2 - L^2}{2} \left[ \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right] + \frac{1}{2} \frac{L^2}{C} + s\gamma_1 \quad (8)$$

где, конечно, также имеют место условия случая С.В. Ковалевской для моментов инерции, однако в интересах последующего изучения возможных возмущенных режимов движения целесообразна именно такая запись выражения гамильтониана.

Известны следующие выражения для связи переменных Андуайе-Депри с естественными параметрами движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ap = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l; \quad Bq = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l; \quad Cr = L; \\ \gamma_1 = \frac{H \sin l}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \left( \frac{L}{G} \sin l \cos g + \cos l \sin g \right); \\ \gamma_2 = \frac{H \cos l}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \left( \frac{L}{G} \cos l \cos g - \sin l \sin g \right); \\ \gamma_3 = \frac{HL}{G^2} - \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g. \end{array} \right. \quad (9)$$

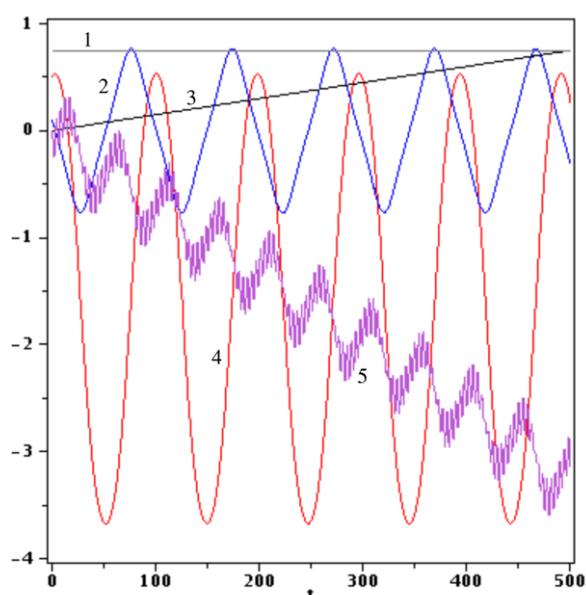
С учетом соотношений (9) и (8) строятся соответствующие канонические уравнения Гамильтона, явный вид которых здесь не приводится:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}; \quad \dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}; \quad \dot{l} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L}; \\ \dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}; \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}; \quad \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l}. \end{array} \right. \quad (10)$$

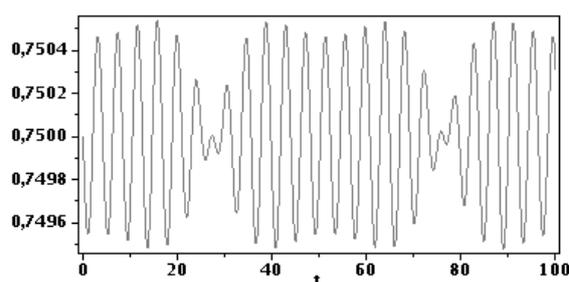
На основе канонических уравнений (10) можно проводить полноценное исследование динамики движения системы. Также из соотношений (9) и (8) видно, что координата  $h$  является циклической, не вторгается в динамику

системы, а соответствующий импульс  $H$  является постоянным и отражает собой очевидный факт сохранения проекции кинетического момента на «вертикальную» инерциальную ось  $Z$ . Таким образом, можно перейти к фазовому подпространству переменных  $\{l, L, g, G\}$ .

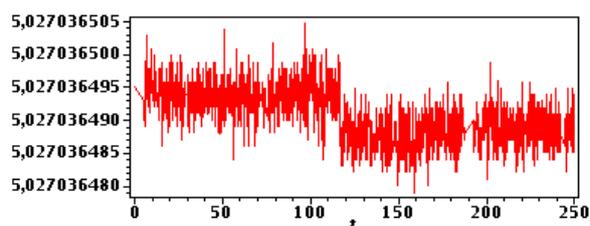
Далее выполним численное изучение динамики случая С.В. Ковалевской в зоне параметров, актуальных для прикладных задач динамики намагниченного КА. За основу возьмем распространенный случай движения малого КА с магнитными катушками на экваториальных орбитах с высотой порядка 500 км, где модуль напряженности геомагнитного поля примерно равен 40000 нТ. Будем предполагать, что магнитные катушки спутника могут создавать собственный дипольный момент величиной до сотен  $A \cdot m^2$ , а начальные условия углового движения соответствуют угловым скоростям в несколько десятков градусов в секунду, что вполне характерно выведению аппаратов в качестве попутной нагрузки. В этом случае будет иметь место эволюция динамических параметров движения, представленная на рисунке (фиг.3), начальные данные для которых приведены ниже в таблице 1.



(а) Параметры Андуайе-Депри



(б) Зависимость  $G(t)$



(в) Интеграл С.В. Ковалевской

Фиг. 3. Зависимости от времени динамических параметров в невозмущенном случае С.В. Ковалевской в условиях, характерных для орбитальной динамики малого КА с магнитной системой управления:

1 – зависимость  $G(t)$  [ $kg \cdot m^2/s$ ]; 2 – зависимость  $L(t)$  [ $\times 10^{-1} kg \cdot m^2/s$ ];

3 – зависимость  $g(t)$  [ $\times 10^3 \cdot rad$ ]; 4 – зависимость  $l(t)$  [ $rad$ ];

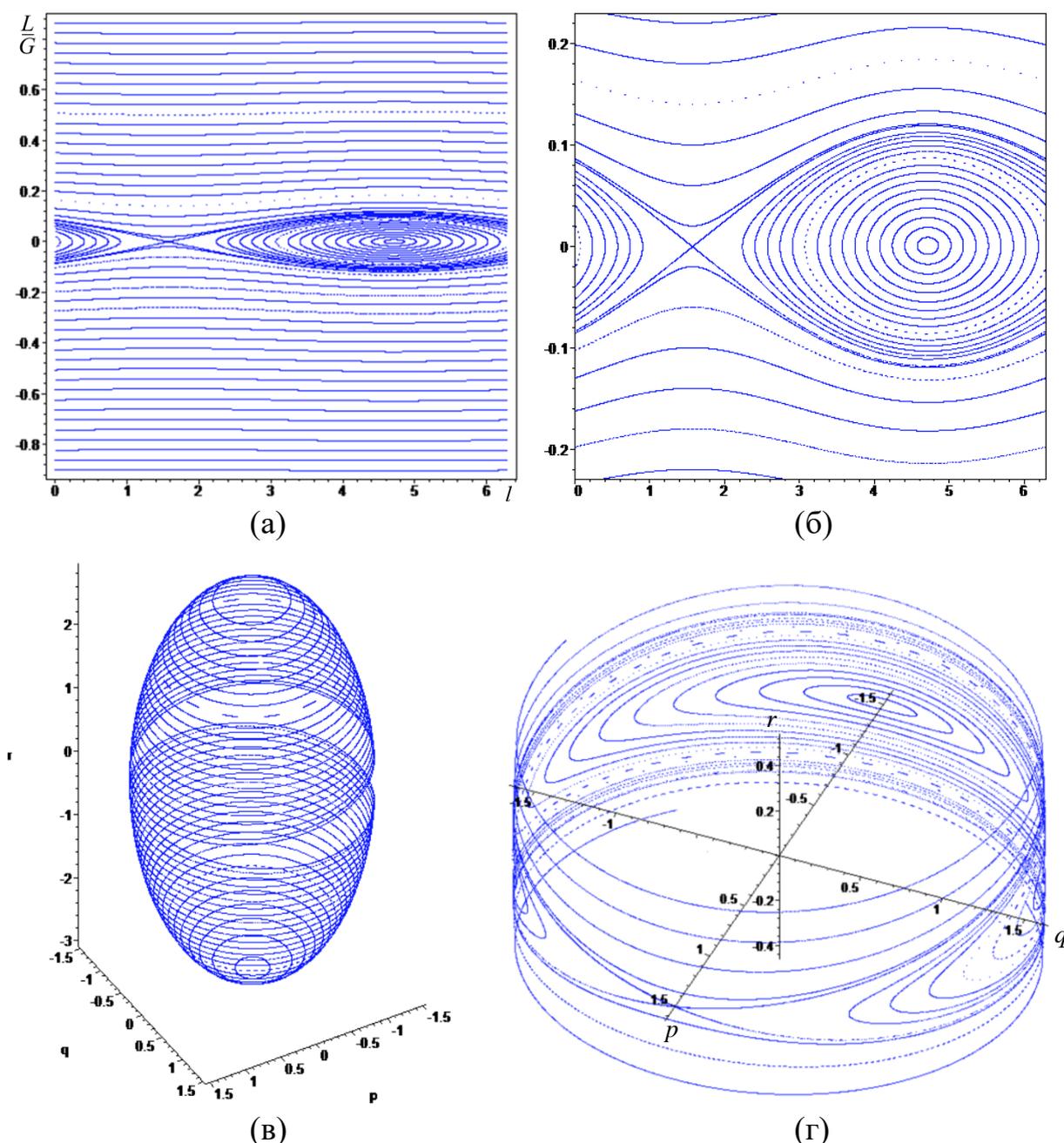
5 – зависимость  $h(t)$  [ $\times 10^{-1} rad$ ]

Как видно из результатов моделирования (фиг.3), в практически важной области параметров будет иметь место слабое изменение величины

вектора кинетического момента  $G(t)$ , а зависимость  $g(t)$  является монотонно растущей по закону, близкому к линейному. Это обстоятельство позволяет корректно ввести в рассмотрение сечение Пуанкаре, выполняемое по угловой величине  $g$ , выводя на сечение фазовые точки в моменты времён периодических повторений главного значения  $g^*$ :

$$g(t) \bmod 2\pi = g^* \quad (11)$$

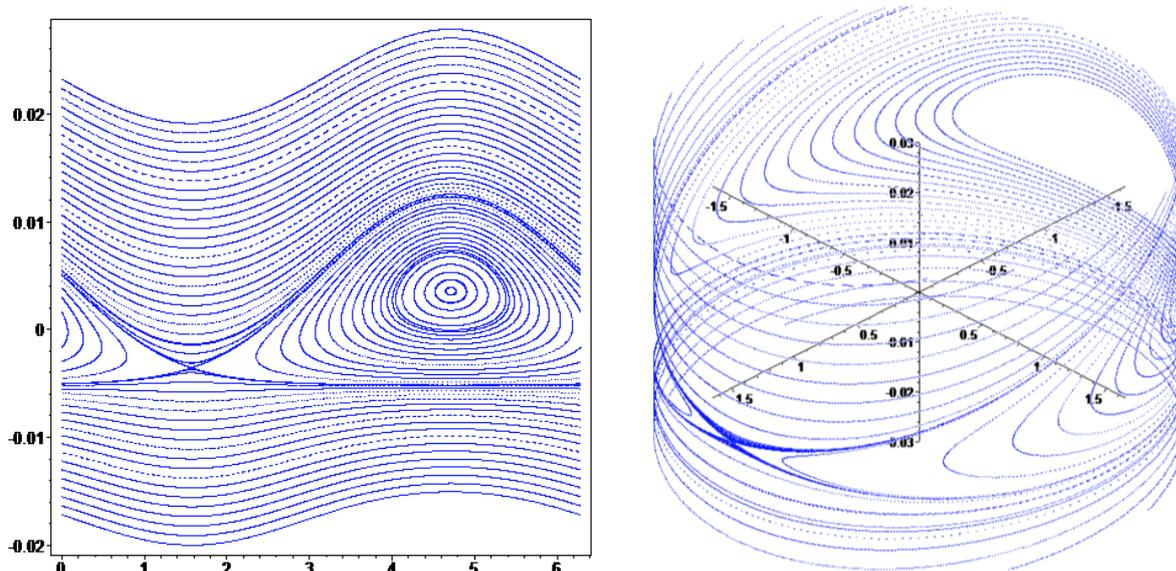
На основе введенного сечения Пуанкаре можно построить нижеследующие фазовые портреты (фиг.4-8) при начальных условиях и параметрах системы, характерных для орбитальной динамики малых намагниченных КА (табл.1).



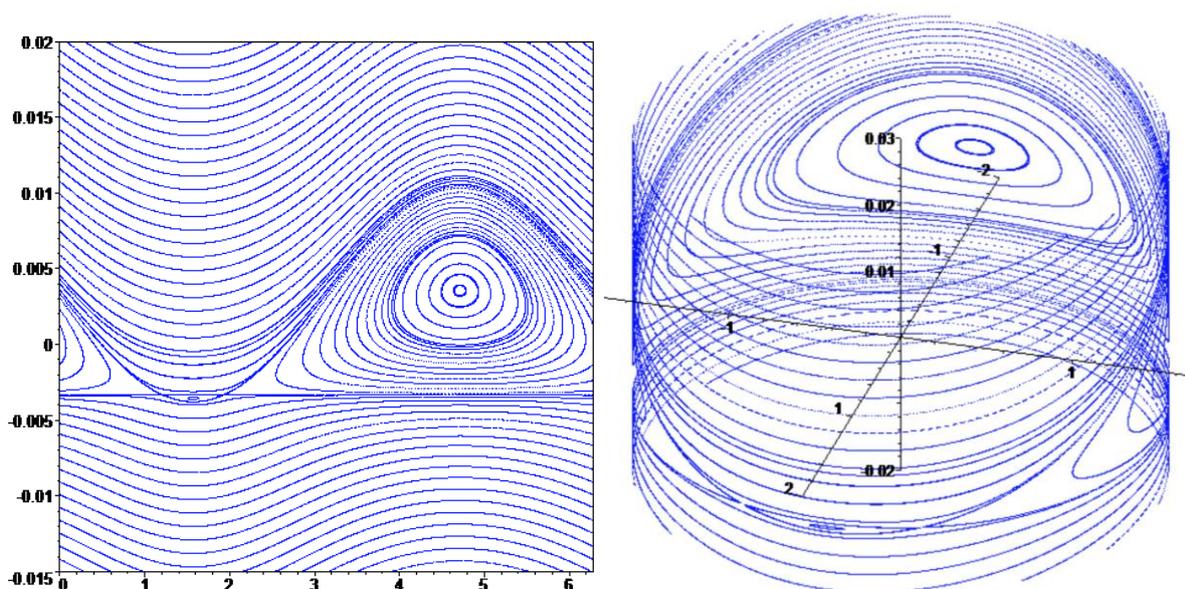
Фиг.4. Фазовый портрет (сечение Пуанкаре при  $g^*=0$ )  $\{l, L/G\}$  невозмущенного случая С.В. Ковалевской в условиях, характерных для орбитальной динамики малого КА с магнитной системой управления

На фиг.4 представлены срезы сечения Пуанкаре при  $g^*=0$  в осях  $\{l, L/G\}$  в крупном масштабе (фиг.4-а) и укрупненная главная область (фиг.4-б). Также на фиг.4-в представлен пересчет среза (фиг.4-а) в точки на эллипсоиде полостей  $\{p, q, r\}$  с укрупненным видом имеющейся щели (фиг.4-г). Пересчет точек сечения Пуанкаре в пространстве переменных Андуайе-Депри в точки на эллипсоиде полостей [12] осуществлен на основе соотношений (9). Таким образом, для каждого сечения Пуанкаре можно иметь срез в виде эллипсоида полостей в пространстве компонент  $\{p, q, r\}$ .

На следующих сечениях Пуанкаре (фиг.5-8) демонстрируется изменение формы фазового портрета при постепенном уменьшении величины  $H$  (табл.2) и наблюдаются соответствующие бифуркационные изменения. Видно, что портрет с одной седловой точкой и двумя гомоклиническими сепаратрисами (фиг.4) постепенно деформируется (фиг.5). На фигуре (фиг.6) рождается вторая седловая точка, новый (второй) колебательный регион, а сепаратрисы (их теперь четыре) становятся гетероклиническими. Здесь важно заметить, что при изменениях параметров в границах их областей, актуальных для прикладных задач космического полета, на сечениях Пуанкаре обнаруживаются только эти два главных топологических типа фазового портрета: с одним седлом и двумя гомоклиническими сепаратрисами или с двумя седлами и четырьмя гетероклиническими сепаратрисами. Оба типа портрета, конечно, деформируются (и весьма серьезно) при изменении параметров, однако появление какого-либо третьего типа в области значений величин, актуальных задачам космического полета, с использованием сечения (11) не выявлено. Стоит сказать, что изучение динамики твердого тела на основе сечений Пуанкаре часто используется исследователями [12-14], в т.ч. в рамках задачи С.В. Ковалевской.



Фиг.5 Сечение Пуанкаре  $\{l, L/G\}$  ( $g^*=0$ ) невозмущенного случая

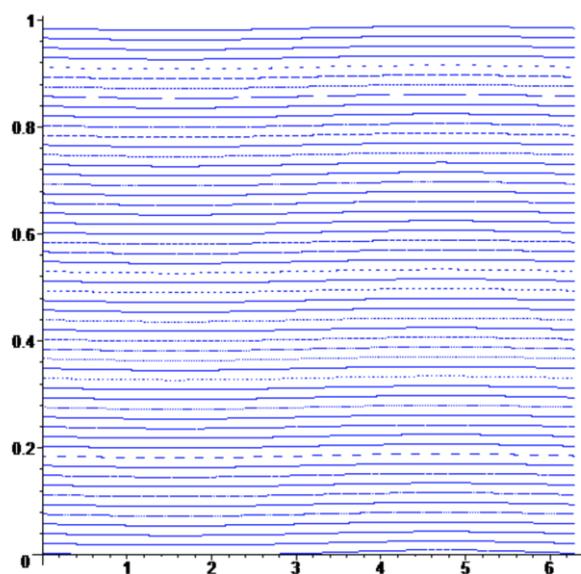


Фиг.6 Сечение Пуанкаре  $\{l, L/G\}$  ( $g^*=0$ ) невозмущенного случая

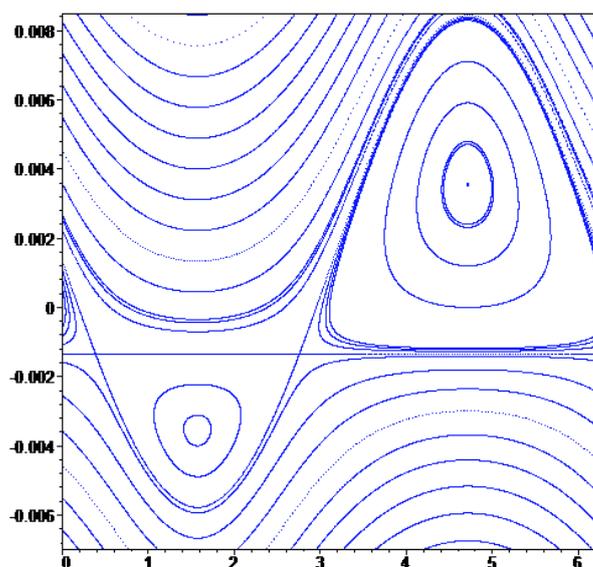
Далее (фиг.7) приведем сечения Пуанкаре с продолжающимся уменьшением величины  $H$ , но теперь сечение выполняется по набору изменяемых значений  $g^*$ .

Таблица 1. Параметры системы и начальные условия движения

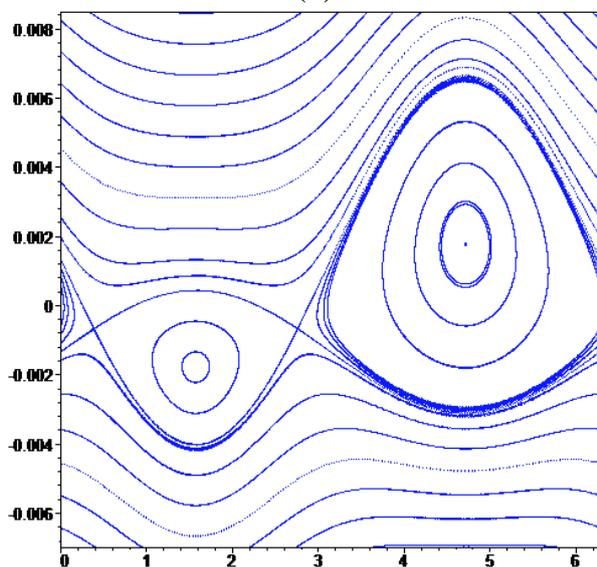
Фиг.	$A$ [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ]	$B$ [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ]	$B_{\text{orb}}$ [Т]	$m_x$ [ $\text{A}\cdot\text{m}_2$ ]	$G$ [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ]	$H$ [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ]	$\varepsilon$
Классический случай С.В. Ковалевской:							
3	0.5	0.5	0.00004	100	0.75	0.74	0
4						0.74	
5						0.004	
6						0.0025	
7						0.001	
8						0	
Инерционная асимметрия экваториальных моментов инерции:							
10	0.5	0.475	0.00004	100	0.75	0.675	0
11		(0.95 $A$ )				0	
12		0.65	0.00005	1000	2.5	2.4	
13		(1.30 $A$ )				2.4	
		0.45	0.0005	1000	2.5	2.4	
		(0.9 $A$ )					
Возмущение величины магнитного момента сил (возмущение геомагнитного поля / орбиты):							
14	0.5	0.495	0.00004	500	2.5	2.4	0.05
15	0.5	0.515	0.00005	1000	2.5	2.4	0.15
		(0.99 $A$ )					
		(1.03 $A$ )					



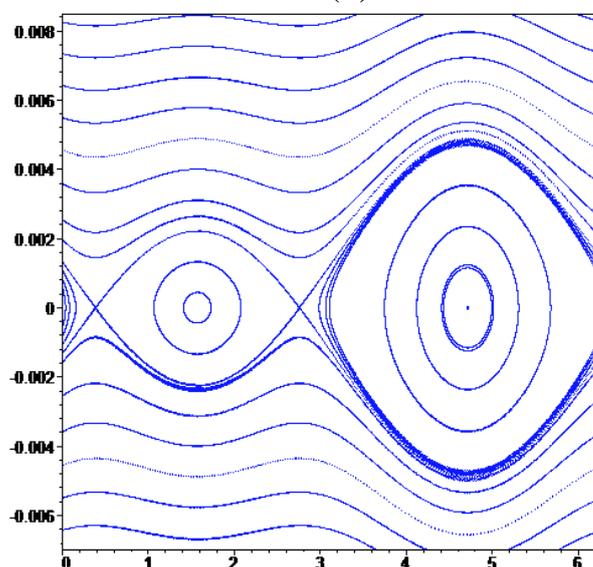
(a)



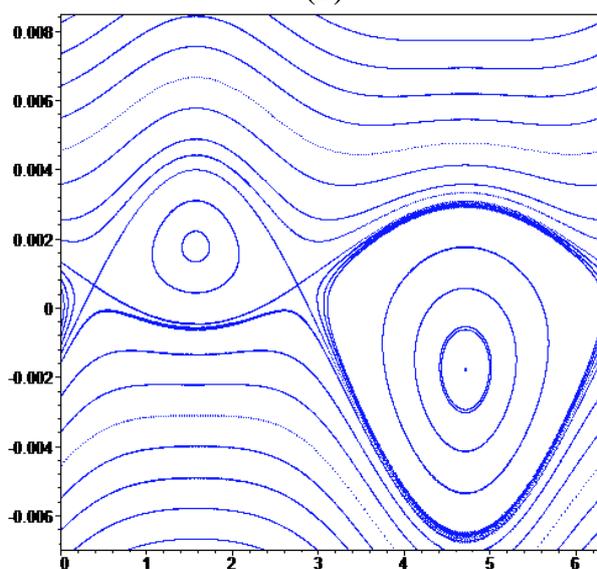
(б)



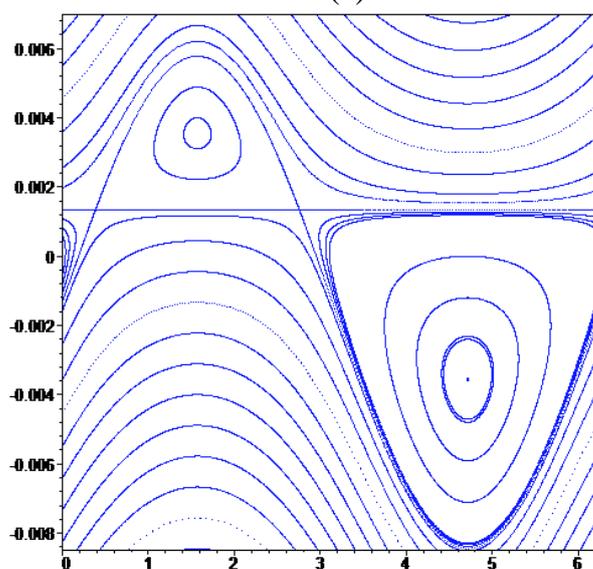
(B)



(Г)



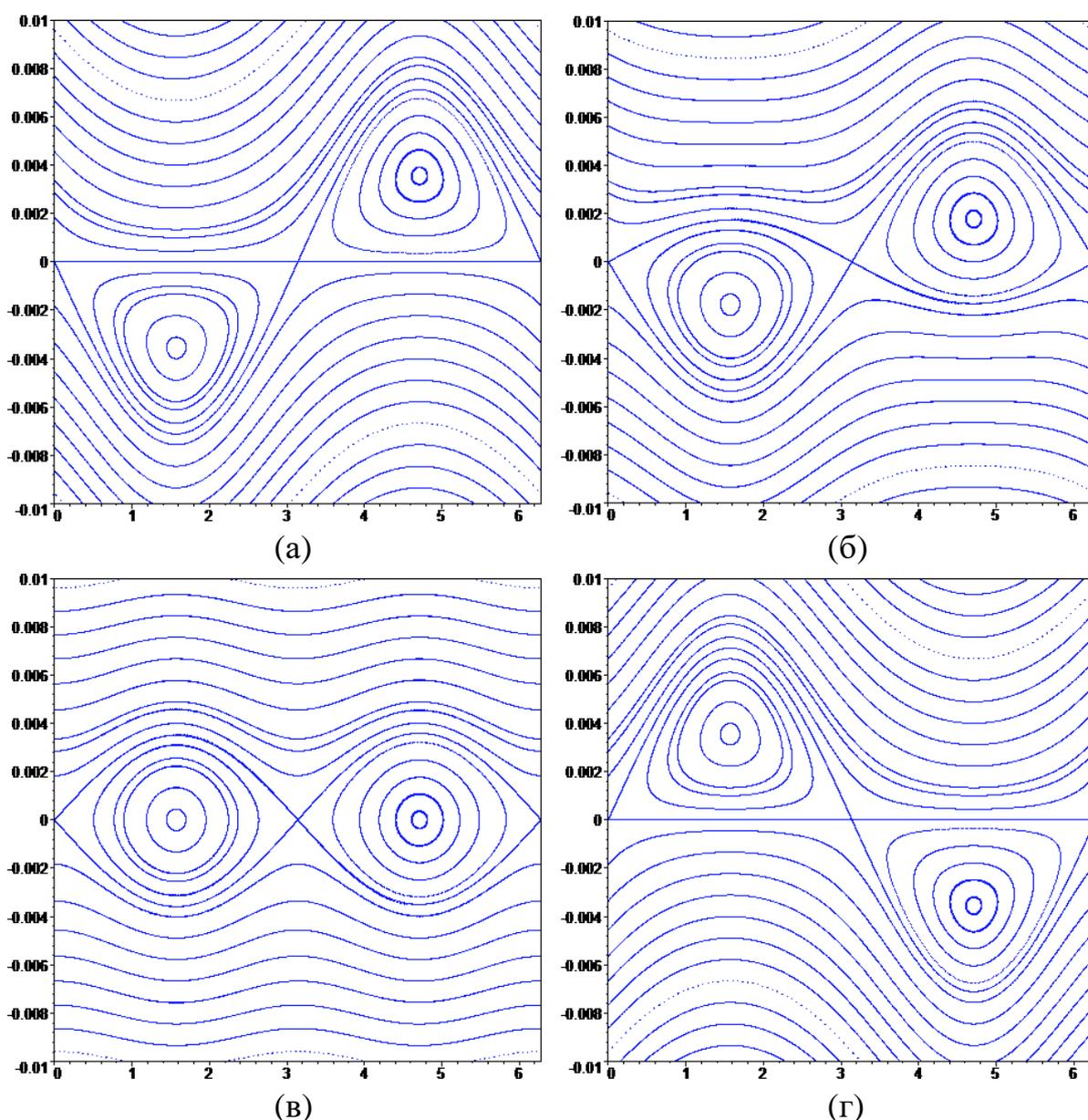
(Д)



(е)

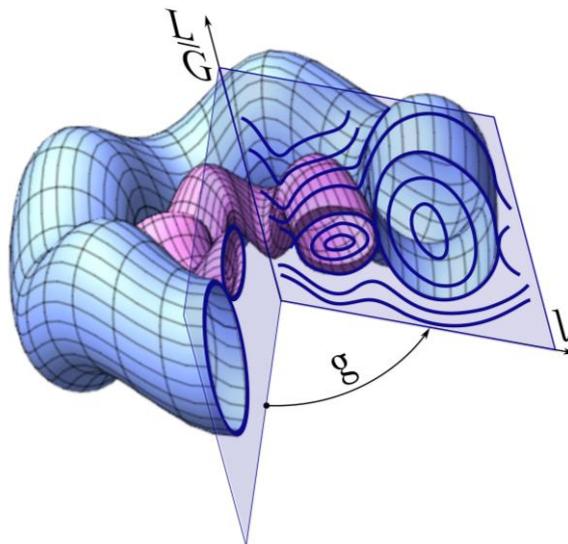
Фиг.7 Сечение Пуанкаре  $\{l, L/G\}$  ( $g^* = \text{var}$ ) невозмущенного случая

На фиг.7 представлены сечения с разными главными величинами  $g^*$ . Так кадры фиг.7-а и фиг.7-б соответствуют  $g^*=0$  и выполнены в разных диапазонах величин  $L$  для наглядности и демонстрации соразмерности структур фазового портрета, причем кадр фиг.7-а соответствует половине портрета и показывает, что структура фазового пространства в крупном масштабе является равномерной («вращательной»), исключая тонкую полосу в окрестности  $L=0$ , продемонстрированную в увеличенном масштабе на кадре фиг.7-б. Далее, кадр фиг.7-в построен при  $g^*=\pi/3$ , кадр фиг.7-г – при  $g^*=\pi/2$ , кадр фиг.7-д – при  $g^*=2\pi/3$ , а кадр фиг.7-е – при  $g^*=\pi$ . Также при разных главных величинах  $g^*$  построены сечения на фиг.8, которые соответствуют предельному значению константы  $H=0$ . Кадр фиг.8-а соответствует  $g^*=0$ , кадр фиг.8-б – сечению  $g^*=\pi/3$ , кадр фиг.8-в – сечению  $g^*=\pi/2$ , кадр фиг.8-г – сечению  $g^*=\pi$ .



Фиг.8 Сечение Пуанкаре  $\{l, L/G\}$  ( $g^*=\text{var}$ ) невозмущенного случая

Из анализа фиг.7 и фиг.8 становится очевидной геометрическая визуализация сечений Пуанкаре в форме связки основных плоскостей  $\{l, L/G\}$  с их размещением вдоль «полярного» угла  $g^*$ , формируя тем самым (при фиксированных константах  $G$  и  $H$ ) «альбом» сечений с их нумерацией по величинам  $g^*$  (фиг.9).



Фиг.9. Формирование альбома сечений Пуанкаре при рассечении объемных фазовых портретов «плоскостями»  $g=g^*$

Если, таким образом, выполнить сечения Пуанкаре для плотного набора значений  $g^*$ , то получится фазовая картина, с большой полнотой определяющая всю динамику системы. Вполне возможно, что в полном таком альбоме для общего случая сочетаний констант в определённых зонах сечений могут возникать и/или погибать отдельные периодические решения [14], однако в рассматриваемом диапазоне параметров, характерных для задач динамики космического полета, подобные эффекты не обнаруживаются. Другими словами, на сечениях внутри альбома в исследуемом случае происходят лишь деформации имеющихся фазовых траекторий и областей, не изменяющие общей топологии сечений внутри альбома. Поэтому можно отметить, что изученные случаи сечений вполне целостно описывают динамику случая С.В. Ковалевской в области параметров, актуальных для динамики космического полета.

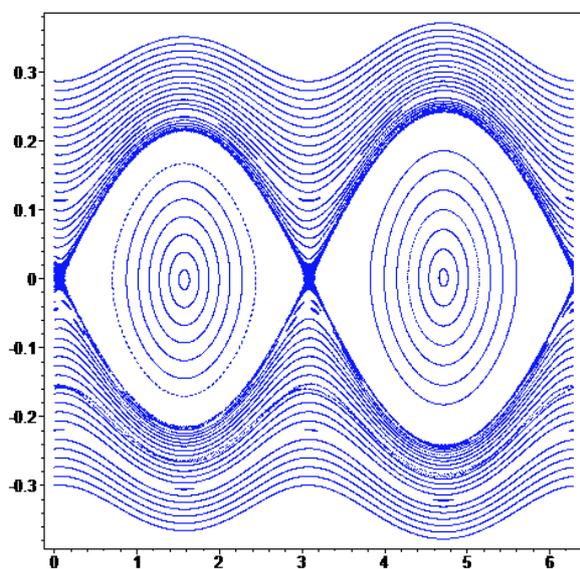
Более того, из фиг.7 и фиг.8 можно отметить, что эти сечения эволюционно и периодически (по  $g^*$ ) деформируются в ограниченном варианте, сохраняя тип единой для всех них топологии, что позволяет сказать, что полная динамика в рамках всего альбома сечений вполне подобна одному из них. Таким образом, выбрав некоторое сечение в роли базового, можно констатировать единое базовое качество движений твердого тела во всех сечениях из альбома, хотя, безусловно, на каждом соседнем сечении фазовая картина будет немного отличаться, оставляя при

этом в целостности топологическую структуру и характерные качественные зоны движений. Это свойство сохранения топологии сечений внутри альбома позволяет по одному из сечений сделать выводы о всей динамике тела, при чередовании сечений в процессе изменения величины  $g^*$  (т.е. в процессе реального движения с изменением переменной  $g(t)$ ).

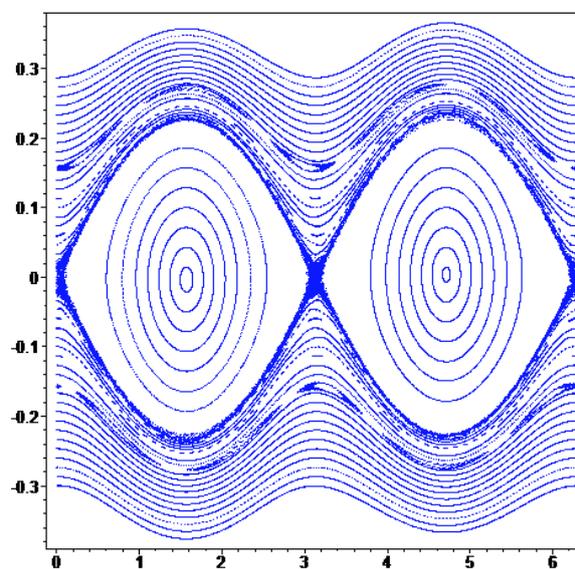
#### 4 Исследование фазового пространства возмущенного случая

В предыдущих разделах была рассмотрена динамика классического случая С.В. Ковалевской при полном выполнении его условий, связанных с точной инерционно-массовой геометрией ( $A=B=2C$ ), а также с тем, что величины, формирующие восстанавливающий/опрокидывающий момент сил ( $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{V}_{orb}$ ) являются постоянными. Покажем теперь разрушение интегрируемости динамики в случае возникновения малой динамической асимметрии или возникновении малых колебаний в величинах магнитной индукции, либо дипольного момента.

Сначала рассмотрим движение при нарушении динамической симметрии твердого тела (намагниченного КА). На фигурах (фиг.10 – 11) представлены сечения Пуанкаре ( $g^*=0$ ), при малом отклонении момента инерции  $B$  от  $A$  в сторону уменьшения (табл.1). Видно изменение объемов главных колебательных областей, а также хаотические слои в окрестностях сепаратрисс и возникновение новых связей вторичных гетероклинических структур.



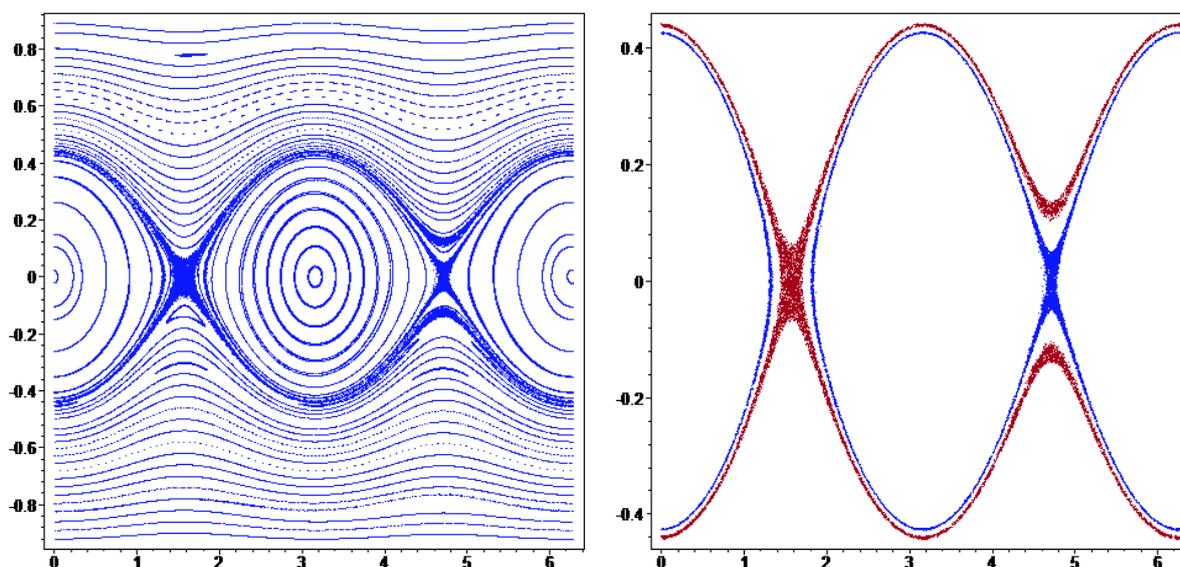
Фиг.10



Фиг.11

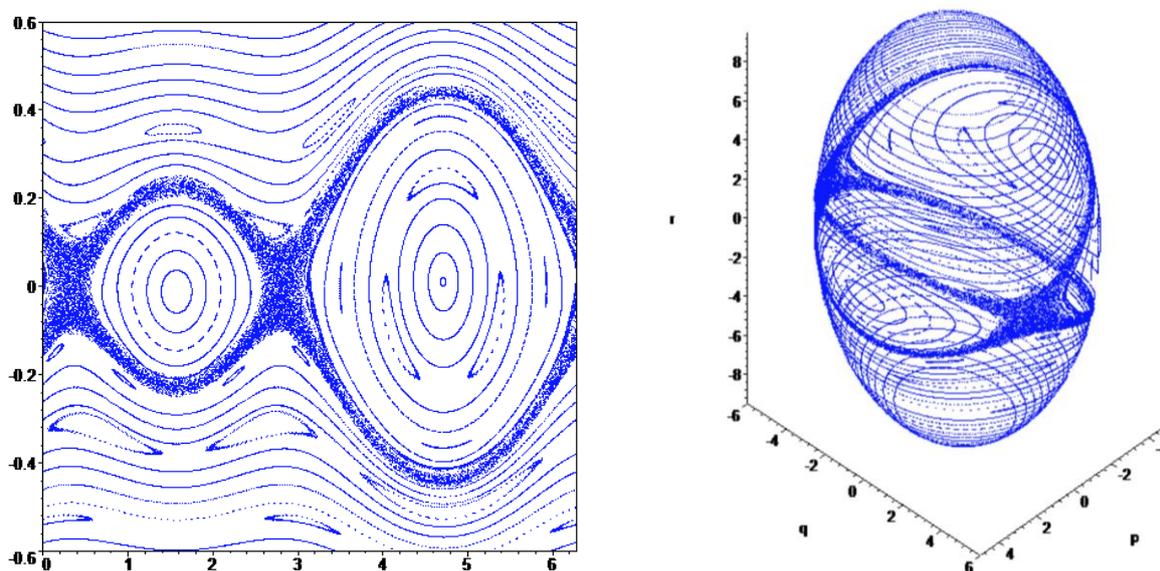
На фиг.12 представлено сечение Пуанкаре ( $g^*=0$ ) в случае малого увеличения момента инерции  $B$  по отношению  $A$  (табл.1). В отличие от прежнего случая (фиг.10, 11) фазовый портрет изменяет структуру в части сдвига колебательных зон и разделения хаотических слоев в окрестностях

разных седел – соответствующие хаотические слои представлены на рисунке разными цветами (фиг.12-б).



Фиг.12. Сечение Пуанкаре  $\{l, L/G\}$  при динамической асимметрии ( $B > A$ )

Дополнительно в интересах наглядности изменений в фазовом портрете представлен вариант динамики вкратно усиленном по сравнению с натуральной величиной (табл.1) магнитном поле (фиг.13).

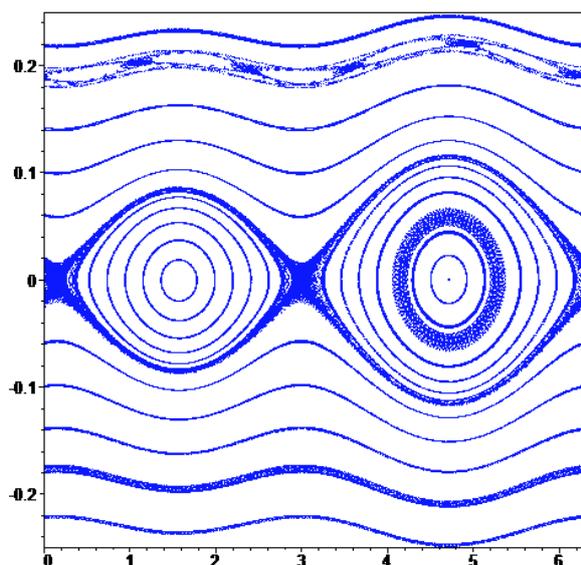


Фиг.13. Сечение Пуанкаре  $\{l, L/G\}$  и эллипсоид полодий при динамической асимметрии в сильном магнитном поле

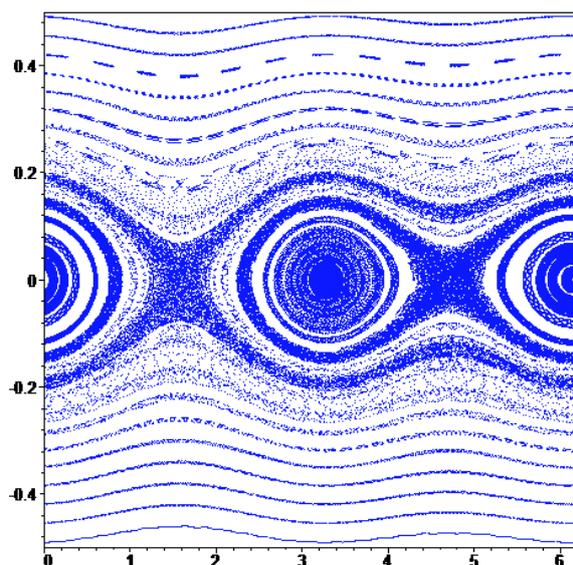
Теперь рассмотрим ситуацию с малыми колебательными возмущениями в величинах магнитной индукции и/или дипольного момента, что выражается малым изменением величины  $s$  (5):

$$s(t) = \bar{s}(1 + \varepsilon \sin \Omega t) \quad (12)$$

Возмущение (12) может описывать слабую эллиптичность орбиты, слабую неэкваториальность орбиты (когда малые изменения величины касаются вектора геомагнитной индукции  $\mathbf{V}_{orb}$ ), либо слабое дрожание величины дипольного момента  $\mathbf{m}$ . При этом простейшем возмущении интегрируемый случай С.В. Ковалевской также разрушается, а фазовые портреты приобретают вид, представленный на сечениях (фиг.14, 15) при  $\Omega=1$  [1/с], где явно видны все признаки возмущенной динамики с возникновением хаотических режимов (в т.ч. разделенные хаотические слои – фиг.15).



Фиг.14

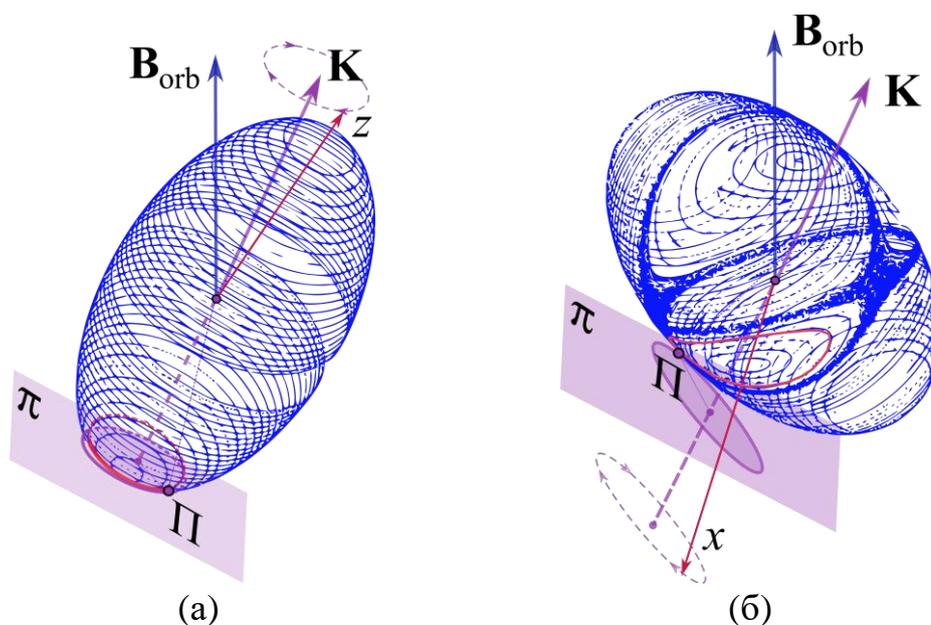


Фиг.15

## 5 Интерпретация углового движения по полученным сечениям Пуанкаре и соответствующим эллипсоидам полодий

Как уже отмечалось выше, при пересчете точек сечений Пуанкаре из переменных Андуайе-Депри обратно в компоненты угловой скорости по формулам (9), можно перейти к структуре эллипсоидов полодий, гомеоморфных классическим полодиям, построенным непосредственно на эллипсоиде инерции тела [12]. Это в свою очередь позволяет применить классическую визуализацию углового движения тела – известную геометрическую интерпретацию Пуансо, когда полодии позволяют визуализировать «обкатывание» тела с соответствующим следом (герполодией) по плоскости перпендикулярной вектору кинетического момента. Кинетический момент тела в рамках изучаемого случая, конечно, изменяется, однако для интересующей области параметров, актуальных для задач космического полета, это изменение весьма слабое, поэтому для понимания движения можно мыслить вектор кинетического момента почти неподвижным (слабо прецессирующим), а далее реализовывать обзор углового движения «обкатыванием» Пуансо (фиг.16).

Таким образом, по полученным полодиям будут видны определенные зоны на эллипсоидах полодий, которые дают возможность представить вращение тела. Для визуализации движения изначально осуществляется сопоставление пространственного положения вектора кинетического момента по отношению к «вертикальной» оси (постоянного вектора геомагнитной индукции), а затем выполняется обкатывание Пуансо по плоскости, перпендикулярной вектору кинетического момента.



Фиг.16. Использование геометрической интерпретации Пуансо на базе эллипсоидов полодий, пересчитанных из сечений Пуанкаре

Например, из рисунка (фиг.16-а) понятно, что для полодий, соответствующих незамкнутым вращательным траекториям из нижней зоны сечения Пуанкаре, будет характерно угловое движение тела, при котором имеется прецессия вокруг вектора кинетического момента и собственное вращение вокруг продольной связанной с телом оси  $z$ . При этом связанная ось  $z$ , описывая коническое вращение вокруг вектора кинетического момента, остается вполне близко к нему, что образно можно назвать прецессионным движением с острыми углами нутации. В случае полодий из главных колебательных зон сечения Пуанкаре (фиг.16-б) будет иметь место иная ситуация, которую можно интерпретировать, как предпочтительное вращение тела относительно экваториальной связанной оси  $x$ , при ее коническом обращении вокруг вектора кинетического момента, при этом «нутационные» колебания происходят с углами в окрестности значения  $\pi/2$  (причем в обратном направлении оси  $x$  в силу асимметрии портрета полодии имеют иные размеры, что изменит величины амплитуд колебаний). Приведенное простое геометрическое прочтение динамики по примеру полодий фиг.16 демонстрирует лишь главную часть

алгоритма визуализации, который безусловно, требует учета имеющихся нюансов, например, размеров и расположения колебательных зон полодий, их возможную асимметрию и смещения по поверхности эллипсоида (например, фиг.6).

Более того, нужно подразумевать, что сами эллипсоиды полодий также «перелистываются» от одного к другому в соответствии с альбомом сечений, и они также будут эволюционно деформироваться периодическим путем при переборе сечений из альбома (т.е. в процессе реального движения с изменением угловой координаты  $g(t)$ ). Это обстоятельство усложняет иллюстрацию движения по полодиям, т.к. они сами постоянно деформируются во времени, хотя и периодически, да и кинетический момент при этом не прекращает своих эволюций в пространстве. Однако, принимая во внимание отмеченные нюансы, на основе подобной интерпретации все же возможно представить сложное реальное движение тяжелого тела (намагниченного КА) в случае С.В. Ковалевской.

Таким образом, полученные сечения и соответствующие им эллипсоиды полодий дают полное качественное представление об угловом движении тела в случае С.В. Ковалевской в интересуемой области динамических параметров, характерных для динамики космического полета КА, а уже для уточненного количественного описания интересуемого режима можно проводить классическое интегрирование динамических уравнений Эйлера и кинематической системы Пуассона.

## 6 Заключение

В статье дана прикладная иллюстрация для движения твердого тела в случае С.В. Ковалевской на основе динамики намагниченного КА на экваториальных круговых орбитах.

С помощью сечений Пуанкаре и соответствующих им трехмерных образов, пересчитанных в компоненты угловой скорости тела и рассматриваемых как эллипсоиды полодий, в работе проведен анализ фазового пространства и интерпретация движения твердого тела в случае С.В. Ковалевской, включая геометрическую визуализацию движения на базе схемы Пуансо.

Рассмотрены простейшие варианты возмущенного движения тела при отклонении от порождающего случая С.В. Ковалевской по причине динамических асимметрий тел, а также вследствие малых изменений характеристик внешнего момента сил, связанных, например, с учетом слабой эллиптичности или неэкваториальности орбит.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sophie Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math. 12 177 - 232, 1889.
  2. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М., 1953. 287с.
  3. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
  4. Козлов В.В. Динамические системы, возникающие на инвариантных торах задачи Ковалевской // Прикладная математика и механика. Том 39. Вып.1. 1975. С. 24-29.
  5. Веселов А. П., Новиков С. П. Скобки Пуассона и комплексные торы, Тр. МИАН СССР. 1984. Т.165. С. 49–61.
  6. Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функциональный анализ и его приложения. 1988. Т. 22. №. 2. С. 87-88.
  7. Харламов М.П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, № 6 – С. 922-930.
  8. Dullin H. R., Juhnke M., Richter P. H. Action integrals and energy surfaces of the Kovalevskaya top // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1994. Т. 4. №06. С. 1535-1562.
  9. Komarov I. V. A generalization of the Kovalevskaya top. Phys. Letters. 1987. V. 123. N 1. P. 14–15.
  10. Yehia H. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies. Mech. Res. Commun. 1986. V. 13. N 3. P. 169–172.
  11. Богоявленский О.И., Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, т. 48, №5, с. 883–938.
  12. Doroshin A.V. Homoclinic solutions and motion chaotization in attitude dynamics of a multi-spin spacecraft // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. V. 19, N 7. P. 2528-2552.
  13. Richter P.H., Dullin H.R., Wittek A. Kovalevskaya top // Publ. Wiss. Film. Tech. Wiss. /Naturw. 1997. Т. 13. С. 33-96.
- Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск, 2001. 384 с.

# Kovalevskaya top and attitude dynamics of magnetized satellites in equatorial orbits

**A.V. Doroshin<sup>a,#</sup>, V.S. Aslanov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> *Samara National Research University, Samara, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: [doran@inbox.ru](mailto:doran@inbox.ru)*

The article gives a visual illustration of the dynamics of a heavy rigid body around a fixed point in the case of S.V. Kovalevskaya, which arises in the framework of applied problems of space flight. The motion of a rigid body in the case of S.V. Kovalevskaya (the Kovalevskaya top) is equivalent to the dynamics of the attitude of a magnetized satellite around its centre of mass during orbital motion along equatorial circular orbits.

The perturbed motion of the magnetized satellite is considered at small deviations from the conditions of the Kovalevskaya top, including a small dynamic asymmetry of the satellite, as well as small variations in the magnitude of the external magnetic moment due to weak ellipticity or non-equatoriality of the orbits.

*Keywords: heavy rigid body, Kovalevskaya top, magnetized satellite, equatorial circle orbits, perturbed motion in geomagnetic field*

## REFERENCES

1. Sophie Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math. 12 177 - 232, 1889.
2. Golubev V. V. Lectures on Integrating Equations of Motion of a Heavy Rigid Body Around a Fixed Point [in Russian], Gostekhizdat, MoscowLeningrad. 1953. 287p.
3. Arkhangelsky Yu. A. 1977 Analytical dynamics of a rigid body [in Russian], Moscow: Nauka. 1977. 328 p.

4. Kozlov, V.V., Dynamic Systems Arising on the Invariant Tori of the Kowalewska Problem // Prikl. Mat. Mekh., 1975, vol.39, no.1, pp.24–29 [J. Appl. Math. Mech., 1975, vol.39, no.1, pp.20–25].
5. Veselov A. P., Novikov S. P. Poisson brackets and complex tori // Trudy Mat. Inst. Steklov. 1984. V.165. Pp. 49-61.
6. Reiman A. G., Semenov-Tyan-Shanskii M. A. Lax representation with a spectral parameter for the kowalevski top and its generalizations // Functional Analysis and Its Applications. 1988. V. 22. №.2. Pp. 158-160.
7. Kharlamov M. P. Bifurcation of common levels of first integrals of the Kovalevskaya problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1983. V. 47. №. 6. Pp. 737-743.
8. Dullin H. R., Juhnke M., Richter P. H. Action integrals and energy surfaces of the Kovalevskaya top // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1994. V.4. №06. Pp. 1535-1562.
9. Komarov I. V. A generalization of the Kovalevskaya top. Phys. Letters. 1987. V. 123. N 1. Pp. 14–15.
10. Yehia H. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies. Mech. Res. Commun. 1986. V. 13. N 3. Pp. 169–172.
11. Bogoyavlenskii O. I. Integrable Euler equations on Lie algebras arising in problems of mathematical physics // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya. 1984. V. 48. №.5. Pp. 883-938.
12. Doroshin A.V. Homoclinic solutions and motion chaotization in attitude dynamics of a multi-spin spacecraft // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. V. 19, N 7. Pp. 2528-2552.
13. Richter P.H., Dullin H.R., Wittek A. Kovalevskaya top // Publ. Wiss. Film. Tech. Wiss. /Naturw. 1997. V.13. Pp. 33-96.
14. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rigid body dynamics. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018. V.52. 521 p.