

УДК 531.36

© 2008 г. А. В. Дорошин

ЭВОЛЮЦИИ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННЫХ ГИРОСТАТОВ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

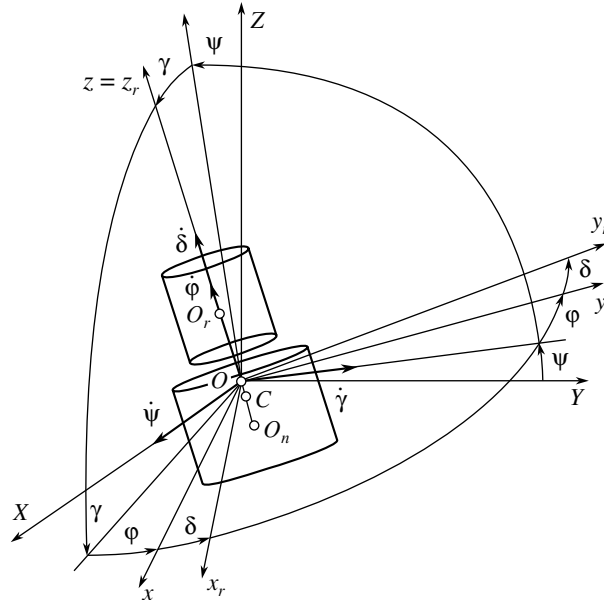
Рассматривается прецессионное движение неуравновешенного гиростата переменного состава при действии диссипативных и разгоняющих внешних и внутренних моментов, зависящих от угловых скоростей тел (носителя и ротора). Разработан качественный метод анализа фазового пространства неавтономных динамических систем, основанный на определении кривизны фазовой траектории. С помощью этого метода проведен анализ движения и синтез условий реализации требуемых режимов нутационно-прецессионного движения неуравновешенных гиростатов переменного состава. Исследован ряд случаев движения гиростата переменного состава, включая свободное движение, движение при наличии постоянных внутреннего и реактивного моментов, а также при действии моментов сил сопротивления, пропорциональных угловым скоростям. Определены возможные эволюции в указанных случаях движения и причины этих эволюций. Получены условия эволюции с уменьшающейся амплитудой нутационных колебаний.

Основные случаи движения твердых тел переменного состава были описаны ранее [1, 2]; уравнения движения строились на основе гипотезы “близкодействия” [1] и принципа “затвердевания” [2]. На основе гипотезы близкодействия записаны уравнения движения гиростата (соосных тел) переменного состава и получены приближенные решения для параметров движения при линейных законах изменения инерционно-массовых параметров [3, 4]. Ниже дается развитие этих результатов, связанное с исследованием движения неуравновешенных гиростатов переменного состава с нелинейными законами изменения инерционно-массовых параметров при действии внутренних и внешних возмущений.

1. Возмущенное движение неуравновешенного гиростата переменного состава. Рассмотрим движение гиростата переменного состава (массы) под действием диссипативных и разгоняющих внешних моментов, зависящих от компонент угловых скоростей. Пусть гиростат состоит из динамически симметричного тела-носителя постоянного состава и ротора переменного состава, остающегося динамически симметричным в процессе изменения массы. Неподвижная точка O (фиг. 1) совпадает с первоначальным геометрическим положением центра масс системы. Точки O_n , O_r соответствуют центрам масс тела-носителя и тела-ротора. Будем использовать следующие системы координат: $OXYZ$ – неподвижная, $Oxyz$ – связанная с телом-носителем, $Ox_r y_r z_r$ – связанная с ротором. Ротор вращается вдоль продольной оси Oz_r , совпадающей с осями динамических симметрий тел. Неуравновешенность гиростата означает непостоянство относительной угловой скорости вращения ротора относительно тела-носителя вследствие действия между телами внутреннего момента взаимодействия M_r . Пусть имеется реактивный момент M_z^R вокруг продольной оси Oz_r .

Запишем уравнения движения системы [3]

$$\tilde{A}(t)\dot{p} + (C(t) - A(t))qr + C_r(t)q\sigma = M_x^e(p, q, r, \sigma)$$



Фиг. 1

$$\tilde{A}(t)\dot{q} - (C(t) - A(t))pr - C_r(t)p\sigma = M_y^e(p, q, r, \sigma) \quad (1.1)$$

$$C(t)\dot{r} + C_r(t)\dot{\sigma} = M_z^R + M_z^e(r, \sigma), \quad C_r(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r + M_z^R + M_{z,r}^e(r, \sigma)$$

Здесь

$$\tilde{A}(t) = A(t) - m(t)\rho^2(t), \quad A(t) = A_n + A_r(t), \quad C(t) = C_n + C_r(t)$$

A_n, C_n и $A_r(t), C_r(t)$ – экваториальные и продольные моменты инерции тела-носителя и ротора (индексы n и r соответственно), $M_x^e(p, q, r, \sigma) = M_{x,n}^e + M_{x,r}^e$, $M_y^e(p, q, r, \sigma) = M_{y,n}^e + M_{y,r}^e$, $M_z^e(r, \sigma) = M_{z,n}^e + M_{z,r}^e$ – моменты внешних сил, $m(t)\rho^2(t)$ – член, возникающий вследствие геометрического перемещения центра масс относительно неподвижной точки [1, 3] в связи с изменением инерционно-массового состава системы, $\rho(t)$ – изменяющееся расстояние от неподвижной точки до центра масс системы вдоль продольной оси Oz , $m(t) = m_n + m_r(t)$ – изменяющаяся масса гиростата, p, q, r – проекции угловой скорости тела-носителя на оси системы $Oxyz$, σ – относительная угловая скорость ротора. Под геометрическим перемещением центра масс подразумевается изменение положения центра масс относительно системы, а не движение точки в механическом смысле.

Необходимо сделать некоторые замечания относительно инерционно-массовых величин, входящих в динамические уравнения (1.1). Экваториальный момент инерции системы $A(t)$ вычисляется относительно неподвижной точки O . С течением времени массовые параметры ротора изменяются. Вследствие этого положение центра масс системы C геометрически смещается относительно точки O . По причине изменения массы точек внутри ротора также может изменяться положение его центра масс (при этом точка O_r смещается по оси Oz_r с сохранением динамической симметрии ротора). Пусть,

например, масса ротора уменьшается, при этом центр масс системы S смещается по оси Oz_r в сторону центра масс тела-носителя O_n (фиг. 1). Величина $\rho(t)$, равная расстоянию от неподвижной точки O до центра масс системы S вдоль оси Oz , вычисляется с помощью определения центра масс и имеет вид

$$\rho(t) = \frac{l_n m_n + l_r(t) m_r(t)}{m_n + m_r(t)} \tag{1.2}$$

где $l_n = OO_n$ и $l_r(t) = OO_r$ расстояния от центров масс тела-носителя и тела-ротора до точки O . Так как при $t = 0$ центр масс системы S и точка O совпадают, то $\rho(0) = 0$ ($l_r(0) m_r(0) = -l_n m_n, l_n < 0, l_r(0) > 0$).

Собственные центральные экваториальные моменты инерции тел $\bar{A}_n > 0, \bar{A}_r(t) > 0$, вычисленные относительно центров масс O_n и O_r , будем считать известными. Тогда по теореме Гюйгенса–Штейнера можно вычислить центральный экваториальный момент инерции системы относительно текущего положения центра масс S

$$\bar{A}(t) = [\bar{A}_n + m_n(|l_n| - |\rho(t)|)^2] + [\bar{A}_r(t) + m_r(t)(|l_r(t)| + |\rho(t)|)^2] > 0$$

Используя снова теорему Гюйгенса–Штейнера, свяжем центральный момент инерции системы относительно S с моментом инерции системы относительно точки O

$$A(t) = \bar{A}(t) + m(t)\rho^2(t) \tag{1.3}$$

Из последнего соотношения следует, что в уравнениях (1.1) $\tilde{A}(t) = \bar{A}(t) > 0$.

Важно отметить, что в задаче рассматривается конечный интервал времени $t \in [0, T]$, на котором все инерционно-массовые параметры системы остаются строго положительными, т.е. механическая постановка задачи корректна, а динамическая система не становится сингулярной.

К динамическим уравнениям следует добавить кинематические уравнения для углов Крылова–Эйлера (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= p \sin \varphi + q \cos \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \\ \dot{\varphi} &= r - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi), \quad \dot{\delta} = \sigma \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\delta = \angle(Ox, Ox_r)$ – угол относительного вращения ротора.

Введем новые переменные, соответствующие величине вектора поперечной угловой скорости G и углу F между этим вектором и осью Oy :

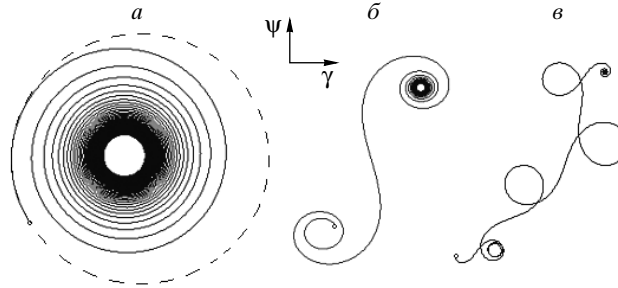
$$p(t) = G(t) \sin F(t), \quad q = G(t) \cos F(t) \tag{1.5}$$

В новых переменных уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \frac{1}{\bar{A}(t)} f_G(G, F), \quad \dot{F} = -\frac{1}{\bar{A}(t)} [C(t)r + C_r(t)\sigma - A(t)r + f_F(G, F)] \\ \dot{r} &= \frac{M_{z,n}^e - M_r}{C_n}, \quad \dot{\sigma} = \frac{C(t)M_r}{C_r(t)C_n} + \frac{M_z^R + M_{z,r}^e}{C_r(t)} - \frac{M_{z,n}^e}{C_n} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Возмущающие функции, характеризующие внешние воздействия, имеют вид

$$f_G(G, F) = (M_x^e \sin F + M_y^e \cos F), \quad f_F(G, F) = \frac{1}{G} (M_x^e \cos F - M_y^e \sin F)$$



Фиг. 2

Рассмотрим случай, когда модуль поперечной угловой скорости тела-носителя мал по сравнению с относительной продольной скоростью вращения ротора:

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 + q^2}/|\sigma| \ll 1 \quad (1.7)$$

а углы γ и ψ будем считать величинами порядка ε . Тогда угол нутации θ (угол между осями OZ и Oz_i) определится следующей приближенной формулой:

$$\theta^2 \cong \gamma^2 + \psi^2 \quad (1.8)$$

С учетом сделанных предположений и соотношений (1.5), (1.6) кинематические уравнения (1.4) можно, отбрасывая члены, начиная со второго порядка малости, записать в виде

$$\dot{\gamma} \cong G \cos \Phi(t), \quad \dot{\psi} \cong G \sin \Phi(t), \quad \dot{\phi} \cong r, \quad \dot{\delta} = \sigma \quad (1.9)$$

где выражение

$$\Phi(t) = F(t) - \varphi(t) \quad (1.10)$$

определяет фазу пространственных колебаний.

2. Метод вычисления кривизны для анализа фазового пространства неавтономной динамической системы. Рассмотрим движение фазовой точки по фазовой плоскости какой-либо неавтономной динамической системы, соответствующей двум неавтономным дифференциальным уравнениям первого порядка, например по фазовой плоскости $\{\gamma, \psi\}$ первых двух уравнений системы (фиг. 2). На указанной плоскости точка будет иметь компоненты скорости $V_\gamma = \dot{\gamma}$, $V_\psi = \dot{\psi}$ и ускорения $W_\gamma = \ddot{\gamma}$, $W_\psi = \ddot{\psi}$ поэтому кривизна ее траектории k , с помощью соотношений (1.9), вычисляется следующим образом:

$$k^2 = \frac{(\dot{\gamma}\ddot{\psi} - \ddot{\gamma}\dot{\psi})^2}{(\dot{\gamma}^2 + \dot{\psi}^2)^3} = \frac{\dot{\Phi}^2}{G^2} \quad (2.1)$$

Если величина кривизны монотонно возрастает, то происходит движение по закручивающейся спиральной траектории, подобной траектории в окрестности устойчивого фокуса (фиг. 2,а), а если убывает – по раскручивающейся. Условие спирального закручивания в силу равенств с учетом положительности G можно записать в виде

$$kk' > 0 \Rightarrow \dot{\Phi}\ddot{\Phi}G - \dot{G}\dot{\Phi}^2 = P(t) > 0 \quad (2.2)$$

Согласно соотношению (1.8) длина радиус-вектора фазовой точки в пространстве $\{\gamma, \psi\}$ соответствует величине угла нутации, поэтому для режимов движения с уменьшающейся амплитудой нутационных колебаний необходимо выполнение условия .

Сначала рассмотрим движение автономной системы, соответствующей свободному гиростату постоянного состава. Из соотношений (2.1), (1.6), (1.9) и третьего уравнения следует, что $k = \text{const}$ (так как при этом $M_z^R = 0$):

$$k = -\frac{Cr_0 + C_r\sigma_0}{AG} \tag{2.3}$$

где $A = A_n + A_r = \text{const}$, $C = C_n + C_r = \text{const}$. Следовательно фазовая траектория (ФТ) будет иметь форму окружности радиуса $R = 1/|k|$, проходящей через точку $\{\gamma_0, \psi_0\}$, с центром на перпендикуляре к начальному вектору фазовой скорости $\mathbf{V}_0 = G_0[\sin\Phi(0), \cos\Phi(0)]^T$. Отметим, что указанная окружность соответствует движению с постоянной величиной угла нутации в неподвижной системе координат, ось OZ которой ориентирована по неизменному направлению вектора кинетического момента (при этом начало системы фазовых координат $\{\gamma, \psi\}$ перемещается в центр окружности).

Далее будем рассматривать неавтономную систему, описывающую движение гиростата переменного состава. Для анализа возможности выполнения условия необходимо изучить расположение корней функции $P(t)$, описывающей эволюцию формы ФТ.

Возможны разные качественные случаи поведения ФТ в зависимости от числа и расположения корней функции $P(t)$ (фиг. 2): 1) функция $P(t)$ положительна и не имеет корней на отрезке $t \in [0, T]$, при этом ФТ спирально закручивается (фиг. 2,а), 2) имеется один корень и происходит одно изменение в монотонности кривизны ФТ (фиг. 2,б), 3) имеется несколько корней и происходит чередование раскручивающихся и закручивающихся участков ФТ, а также появляются точки самопересечения (фиг. 2,в).

Рассмотрим задачу, когда переменные моменты инерции и момент реактивных сил – известные функции времени, а момент внутреннего взаимодействия носителя и ротора описывается известной зависимостью от времени, либо от продольных угловых скоростей r и σ . Если при этом система допускает решения для параметров угловых скоростей $r(t)$, $\sigma(t)$, $G(t)$, $F(t)$ в квадратурах, то функция $P(t)$ может быть записана в явном виде. Если использовать разложение полученных квадратур в степенные ряды, то возможно представление функции $P(t)$ в виде полинома $P_N(t)$ конечной степени N , справедливое с некоторой точностью внутри своего интервала сходимости.

Вещественные некрлатные корни этого полинома определяют точки перегиба ФТ, а интервалы сохранения знака – временные интервалы монотонности ее поведения. Выбирая законы изменения инерционно-массовых параметров гиростата и начальные условия движения, можно изменять коэффициенты полинома $P_N(t)$, влияя тем самым на его корни, а следовательно, на вид ФТ. Более того, можно обеспечить устойчивость (в смысле расположения корней) полинома $P_N(t)$, что будет являться достаточным условием монотонного поведения ФТ. Для этого вполне применимы стандартные приемы, например, использование неравенств Рауса–Гурвица, амплитудно-фазового критерия А.В. Михайлова и т.п. [5].

Таким образом, исследование движения гиростата переменного состава можно выполнять, анализируя расположение корней функции $P(t)$ (либо приближающего ее полинома) без дальнейшего решения задачи Дарбу, связанной с интегрированием кинематических уравнений (1.9). Далее рассмотрим примеры использования разработанного метода для анализа фазового пространства гиростата переменного состава.

3. Свободное движение уравновешенного гиростата переменного состава. Рассмотрим свободное движение уравновешенного (при отсутствии моментов M_r, M_z^R) гиростата переменного состава с моментами инерции, уменьшающимися во времени по линейным законам. Определим условия, при которых реализуется движение с монотонно уменьшающейся амплитудой нутации, что является необходимым требованием в некоторых практических задачах механики космического полета [2, 4]. Линейные законы

изменения моментов инерции ротора соответствуют ситуации, при которой происходит линейное во времени и равномерное по всему объему уменьшение массы ротора:

$$\begin{aligned} m_r(t) &= m_r - vt \quad (v > 0, m_r = m_r(0), m_r(t) > 0, t \in [0, T]) \\ A_r(t) &= \alpha m_r(t), \quad C_r(t) = \beta m_r(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где α и β – постоянные величины. Так, например, для сплошной цилиндрической формы ротора

$$\alpha = H^2/12 + R^2/4 + l_r^2, \quad \beta = R^2/2$$

где H – высота цилиндра, R – его радиус. Будем считать, что начальное продольное вращение тела-носителя отсутствует, т.е. $r_0 = 0$.

Уравнения движения в рассматриваемом случае принимают вид

$$\begin{aligned} G &= G_0, \quad \dot{F} = -\frac{1}{\tilde{A}(t)}(C_r - ct)\sigma_0, \quad r = r_0 = 0, \quad \sigma = \sigma_0 \\ \tilde{A}(t) &= A - at - m(t)\rho^2(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $A = A_n + \alpha m_r$ – начальный поперечный момент инерции гиростата, $C_r = \beta m_r$ – начальный продольный момент инерции ротора, $a = \alpha v > 0$, $c = \beta v > 0$ – скорости уменьшения моментов инерции. Используя соотношения (3.2), имеем

$$P(t) = \frac{(C_r - ct)\sigma_0^2}{\tilde{A}^3(t)} \left[aC_r - c(A - m(t)\rho^2(t)) + (C_r - ct)\frac{d}{dt}(m(t)\rho^2(t)) \right] \quad (3.3)$$

Величина $\tilde{A}(t)$ положительна, так как равна центральному моменту инерции, поэтому для выполнения условия (2.2) необходимо и достаточно положительности выражения в квадратных скобках, что соответствует неравенству

$$g(t) + a/A > c/C_r \quad (3.4)$$

где

$$g(t) = \frac{1}{AC_r} \left[cm(t)\rho^2(t) + (C_r - ct)\frac{d}{dt}(m(t)\rho^2(t)) \right] \quad (3.5)$$

Условие уменьшения амплитуды нутации обобщает полученное ранее другим способом аналогичное условие [4]

$$a/A > c/C_r \quad (3.6)$$

в котором величина $g(t)$ не учитывалась. Так как в рассматриваемом случае происходит равномерное изменение массы в объеме ротора, то его центр масс сохраняет свое положение относительно системы ($l_r = \text{const}$). Зависимость от времени расстояния от неподвижной точки O до центра масс системы S будет иметь вид

$$\rho(t) = -vl_r t / (m - vt); \quad m = m_n + m_r(0) \quad (3.7)$$

В этом случае функция (3.5) и ее производная запишутся следующим образом:

$$g(t) = v^2 l_r^2 \frac{2C_r m t - (vC_r + cm)t^2}{AC_r(m - vt)^2}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{2v^2 l_r^2 (C_r - ct)m^2}{AC_r(m - vt)^3}$$

Видно, что функция $g(t)$ монотонно возрастает на отрезке $t \in [0, C_r/c] \supset [0, T]$. В начальный момент времени условия (3.4) и (3.6) совпадают, а с течением времени условие усиливается по сравнению с (3.6).

4. Движение неуравновешенного гиростата переменного состава при действии постоянных внутреннего и реактивного моментов. Рассмотрим движение неуравновешенного гиростата переменного состава при действии постоянных продольных внутреннего и реактивного моментов. Как и в разд. 3, будем считать, что происходит равномерное по объему уменьшение массы ротора и справедливы линейные законы (3.1).

В этих предположениях уравнения (1.6) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{G} &= 0, \quad \dot{F} = -\frac{(C_n + C_r - ct - A + at)r + (C_r - ct)\sigma}{A - at - m(t)\rho^2(t)} \\ \dot{r} &= -\frac{M_r}{C_n}, \quad \dot{\sigma} = \frac{(C_n + C_r - ct)M_r}{(C_r - ct)C_n} + \frac{M_z^R}{C_r - ct} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из последних двух уравнений следуют аналитические решения

$$r = r_0 - \frac{M_r}{C_n}t, \quad \sigma = \sigma_0 + s_1t + s_2 \ln(1 - c_1t); \quad s_1 = \frac{M_r}{C_n}, \quad s_2 = -\frac{M_r + M_z^R}{c}, \quad c_1 = \frac{c}{C_r} \quad (4.2)$$

Из кинематических уравнений (4.1) можно получить

$$\varphi = \varphi_0 + r_0t - \frac{M_r}{2C_n}t^2 \quad (4.3)$$

Используя второе уравнение (4.1), решения (4.2) и зависимости (3.1), (3.7), при учете равенства (1.10) производную для фазы Φ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{1}{A - at - \frac{v^2 l_r^2 t^2}{m - vt}} \left[(C_n + C_r - ct - A + at) \left(\frac{M_r}{C_n}t - r_0 \right) - \right. \\ &\quad \left. - (C_r - ct)(\sigma_0 + s_1t + s_2 \ln(1 - c_1t)) \right] + \frac{M_r}{C_n}t - r_0; \quad m = m_n + m_r(0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

С помощью дифференцирования равенства (4.4) можно получить функцию $P(t)$ в явном виде, что позволяет в полном объеме проводить дальнейшее исследование нутационно-прецессионного движения гиростата. Однако вид функции $P(t)$ получается громоздким и его использование для анализа и, в особенности, синтеза режимов движения оказывается весьма трудоемким.

Рассмотрим задачу синтеза параметров гиростата и начальных условий, обеспечивающих такое движение, при котором первая эволюция фазовой траектории будет проходить с увеличением ее кривизны, что соответствует наличию начального этапа движения с уменьшающейся амплитудой угла нутации. Будем также считать, что начальное вращение тела-носителя вокруг продольной оси отсутствует ($r_0 = 0$).

Для решения поставленной задачи целесообразно заменить функцию $P(t)$ приближающим ее полиномом путем разложения $P(t)$ в ряд Маклорена. Ограничиваясь двумя членами ряда, получим

$$P(t) = \dot{\Phi}\ddot{\Phi} \cong f_0 + f_1t \quad (4.5)$$

$$f_0 = \frac{C_r}{A^3} [(aC_r - cA)\sigma_0^2 + AM_z^R\sigma_0]$$

$$f_1 = \frac{3a^2 C_r^2 \sigma_0^2}{A^4} + \frac{C_r \sigma_0}{A^3} \left[4aM_z^R + 2\sigma_0 \left(\frac{C_r v^2 l_r^2}{m} - 2ca \right) \right] + \frac{1}{A^2} [c^2 \sigma_0^2 - c(2M_r + 3M_z^R) + (M_z^R)^2]$$

Как отмечено в разд. 2, достаточным условием движения с монотонным характером ФТ является устойчивость полинома $P_N(t)$, что в рассматриваемом случае сводится к положительности коэффициентов f_0 и f_1 .

Пусть $\sigma_0 > 0$, $M_z^R > 0$. Положительность f_0 достигается при выполнении неравенства (3.6) или совместного выполнения следующих неравенств:

$$c/C_r > a/A, \quad \sigma_0(ca - aC_r) < AM_z^R \quad (4.6)$$

Положительность f_1 возможна при совместном выполнении следующих условий:

$$\sigma_0 \left(c - \frac{C_r v^2 l_r^2}{2am} \right) < M_z^R, \quad 3M_z^R - \frac{(M_z^R)^2}{c\sigma_0} < c\sigma_0 - M_r \quad (4.7)$$

а также она возможна, когда

$$C_r v^2 l_r^2 > 2cam, \quad M_r + 3M_z^R < 0$$

Могут быть найдены и другие ограничения, обеспечивающие положительность f_0 и f_1 . Аналогичным образом подобные условия можно получить и для других сочетаний знаков σ_0 и M_z^R

Для иллюстрации условий и приведем результаты расчетов ФТ для четырех случаев (фиг. 3), полученные численным интегрированием уравнений и при следующих значениях параметров

$$A_n = A_r = 2.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad C_n = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad C_r = 1.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad a = c = 0.08 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$$

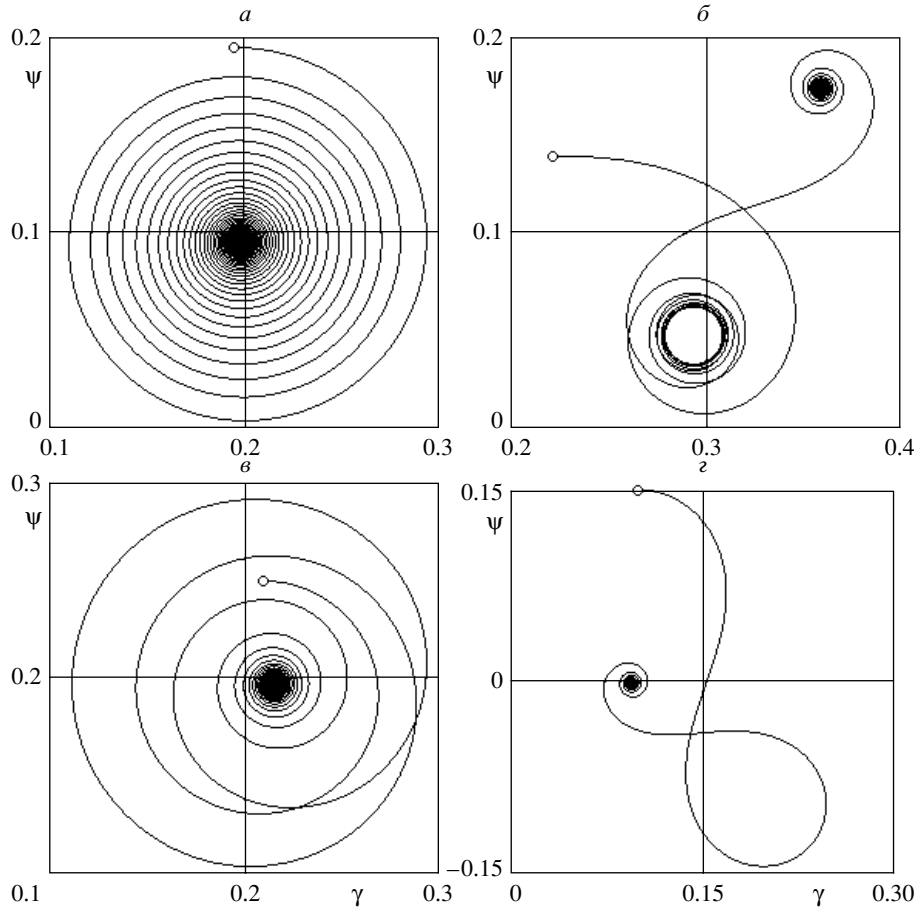
$$l_r = 0.5 \text{ м}, \quad m_n = m_r = 35 \text{ кг}, \quad v = 1 \text{ кг/с}, \quad T = 20 \text{ с}$$

Начальные условия движения приведены ниже

Случай	а	б	в	г
$M_r, \text{ Н} \cdot \text{м}$	1	-10	200	650
$M_z^R, \text{ Н} \cdot \text{м}$	2	10	0.35	0.2
$\sigma_0, 1/\text{с}$	10	1	20	9.5
$G_0, 1/\text{с}$	0.3	0.15	0.35	0.18

Случаи *а* и *б* соответствуют одновременному выполнению всех условий (4.6) и (4.7); при этом траектории имеют на начальном этапе вид закручивающейся спирали, причем для случая *а* эта эволюция единственная. В случаях *в* и *г* не выполняются вторые из парных неравенств (4.6), (4.7) и имеются начальные этапы движения по раскручивающейся спирали.

5. Движение гиростата переменного состава при действии внешних моментов диссипативных сил. Рассмотрим движение неуравновешенного гиростата переменного состава при действии постоянных продольных моментов сил внутреннего взаимодействия, моментов реактивных сил, а также при наличии внешних моментов диссипативных сил, пропорциональных угловым скоростям гиростата. Движение рассматривается на конечном интервале времени $t \in [0, T]$, на котором все инерционно-массовые параметры си-



Фиг. 3

стемы, изменяющиеся во времени, остаются строго положительными (см. разд. 1). Указанная постановка обобщает подобные задачи исследования движения твердого тела и гиригата постоянной массы, рассмотренные ранее ([6–9] и др.).

В указанном случае моменты внешних диссипативных сил имеют вид

$$M_x^e = -\nu p, \quad M_y^e = -\nu q, \quad M_{z,n}^e = -\lambda r, \quad M_{z,r}^e = -\mu(r + \sigma)$$

Постоянные ν, μ, λ характеризуют действие на гиригата сопротивляющейся среды. Динамические уравнения движения (1.1) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{A}(t)\dot{p} + (C(t) - A(t))qr + C_r(t)q\sigma &= -\nu p \\ \bar{A}(t)\dot{q} - (C(t) - A(t))pr - C_r(t)p\sigma &= -\nu q \\ C(t)\dot{r} + C_r(t)\dot{\sigma} &= M_z^R - \lambda r - \mu(r + \sigma), \quad C_r(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r + M_z^R - \mu(r + \sigma) \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\bar{A}(t) = A(t) - m\rho^2(t) > 0$ на всем рассматриваемом временном интервале движения $t \in [0, T]$, так как считается, что все условия корректности механической постановки задачи выполнены.

Из последнего уравнения (5.1) следует уравнение и общее решение для абсолютной продольной скорости ротора

$$\Omega = r + \sigma, \quad \dot{\Omega} = \frac{1}{C_r(t)}(M_r + M_z^R - \mu\Omega)$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{\mu}(M_r + M_z^R) - \frac{1}{\mu}(M_r + M_z^R - \mu\Omega_0)\exp[-\mu J_C(t)], \quad J_C(t) = \int_0^t \frac{dt}{C_r(t)} \quad (5.2)$$

При учете соотношений (5.2) из третьего уравнения (5.3) следует уравнение и общее решение для продольной скорости тела-носителя

$$C_n \dot{r} = -M_r - \lambda r, \quad r(t) = \left(r_0 + \frac{M_r}{\lambda}\right)\exp\left[-\frac{\lambda t}{C_n}\right] - \frac{M_r}{\lambda} \quad (5.3)$$

В рассматриваемом случае возмущающие функции в (1.6) уравнениях имеют вид

$$f_G(G, F) = -vG, \quad f_F(G, F) = 0$$

поэтому первые два уравнения (1.6) запишутся следующим образом:

$$\dot{G} = -\frac{vG}{\bar{A}(t)}, \quad \dot{F} = -\frac{1}{\bar{A}(t)}(C_n r + C_r(t)\Omega - A(t)r) \quad (5.4)$$

Отсюда следует решение для амплитуды поперечной угловой скорости

$$G(t) = G_0 \exp[-vJ_A(t)], \quad G_0 > 0, \quad J_A(t) = \int_0^t \frac{1}{\bar{A}(t)} \quad (5.5)$$

Пусть все инерционно-массовые параметры описываются полиномиальными функциями времени, принимающими на отрезке $t \in [0, T]$ строго положительные значения:

$$A(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i, \quad C_r(t) = \sum_{i=0}^m c_i t^i, \quad m r^2(t) = \sum_{i=0}^l s_i t^i, \quad \bar{A}(t) = \sum_{i=0}^n (a_i - s_i) t^i = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i t^i; \quad (5.6)$$

$$n = \max\{k, l\}$$

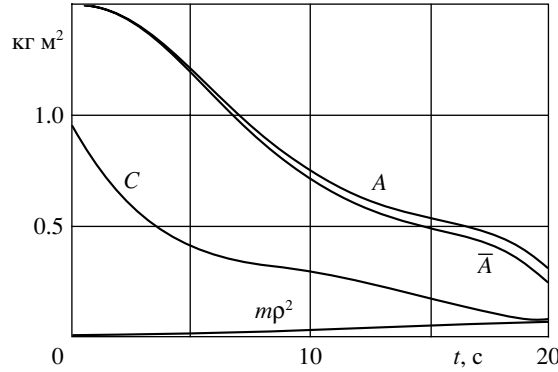
Тогда можно аналитически вычислить интегралы, входящие в соотношения (5.5) и (5.2). Получим

$$J_A(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\ln|t - \alpha_i|}{\dot{\bar{A}}(\alpha_i)} \Big|_0^t, \quad J_C(t) = \int_0^t \frac{dt}{C_r(t)} = \sum_{i=1}^m \frac{\ln|t - \beta_i|}{\dot{C}_r(\beta_i)} \Big|_0^t \quad (5.7)$$

где α_i и β_i – корни полиномов $\bar{A}(t)$ и $C_r(t)$, среди которых в силу налагаемых требований корректности механической постановки задачи нет действительных корней, попадающих на отрезок $t \in [0, T]$. Отметим, что формулы (5.7) можно проверить дифференцированием.

Учитывая формулы (5.7), из выражений (5.2), (5.3) и (5.5) получим окончательные аналитические решения для продольных угловых скоростей тел и амплитуды поперечной угловой скорости гиростата. Используя первое уравнение (5.4), имеем

$$P(t) = G \left(\frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{dt} + \frac{v\Phi^2}{\bar{A}(t)} \right) \quad (5.8)$$



Фиг. 4

Рассмотрим сначала случай, когда моменты внутреннего взаимодействия и реактивных сил отсутствуют, а тело-носитель не имеет начальной продольной угловой скорости [4]:

$$M_r = M_z^R = 0; \quad r_0 = 0 \tag{5.9}$$

Проведем вспомогательные преобразования величин, входящих в формулу (5.8). При учете равенств (5.9) из решения (5.3) следует, что $r(t) \equiv 0$. Поэтому на основании соотношений (1.10) и (1.9) $\dot{\Phi} = \dot{F}$. Заменяя $\dot{\Omega}$ правой частью соответствующего уравнения, а \dot{F} – правой частью (5.4), запишем выражения

$$\dot{\Phi}^2 = \frac{C_r^2(t)}{\bar{A}^2(t)} \Omega^2, \quad \frac{d\dot{\Phi}^2}{dt} = \frac{2\Omega^2}{\bar{A}^3} (\dot{C}_r C_r \bar{A} - \dot{\bar{A}} C_r^2 - \mu C_r \bar{A})$$

Теперь функция принимает вид

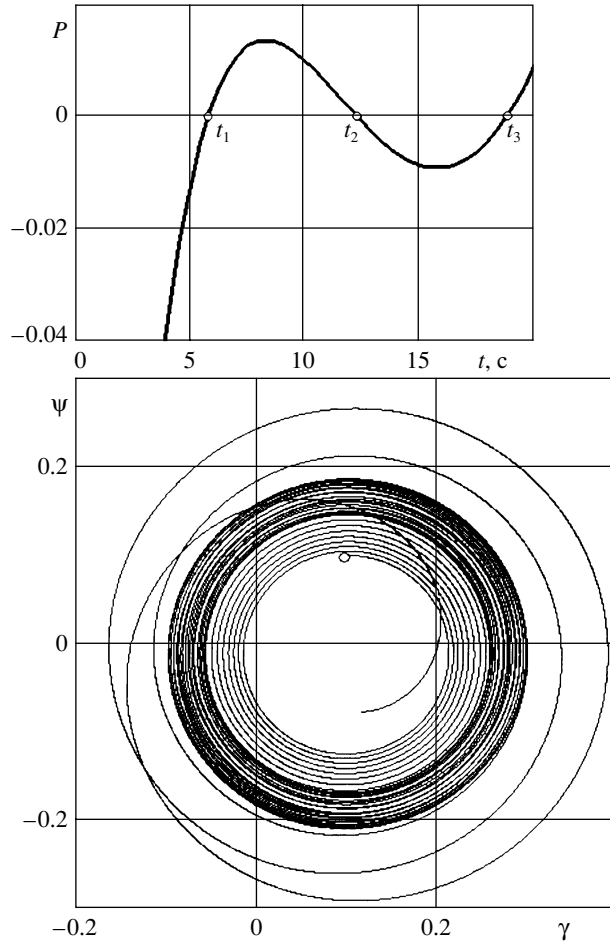
$$P(t) = \frac{G\Omega^2 C_r}{\bar{A}^3} (\dot{C}_r \bar{A} - \dot{\bar{A}} C_r - \mu \bar{A} + \nu C_r) \tag{5.10}$$

Из решений (5.5) и (5.2) следует, что $G > 0, \Omega \neq 0$, поэтому множитель перед скобками в выражении (5.10) строго положителен на всем отрезке $t \in [0, T]$. На основании последнего замечания за функцию $P(t)$ можно принять выражение

$$P(t) = \dot{C}_r \bar{A} - \dot{\bar{A}} C_r - \mu \bar{A} + \nu C_r \tag{5.11}$$

Из соотношений (5.11) и (5.6) следует, что функция $P(t)$ – полином степени $N = m + n - 1$, поэтому теоретически возможное количество эволюций ФТ может быть не больше $N + 1$, если все N корней этого полинома окажутся действительными и попадут внутрь отрезка $t \in [0, T]$.

Для гипотетических законов изменения инерционно-массовых параметров (фиг. 4), соответствующих полиномам (5.6) четвертого порядка с коэффициентами, представленными в таблице, (фиг. 5) показаны результаты численного расчета ФТ и полинома $P(t)$ (точка соответствует началу ФТ). Так как в рассматриваемом случае старший коэффициент полинома $P(t)$ равен нулю ($p_7 = 4c_4 \bar{a}_4 - 4\bar{a}_4 c_4 = 0$), полином имеет шестой поря-



Фиг. 5

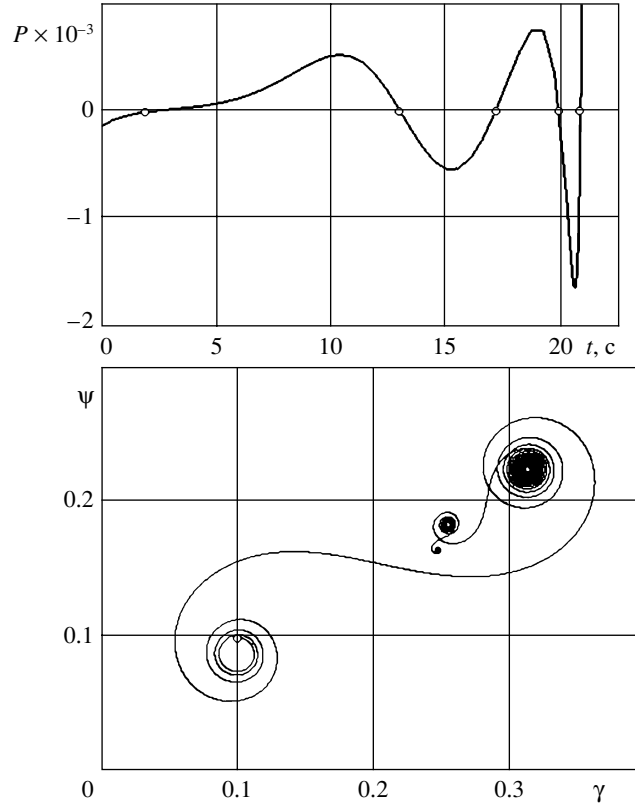
док (коэффициенты p_i также представлены в таблице). Расчеты проводились при выполнении условий (5.9) и следующих значениях параметров системы и начальных условиях движения:

$$G_0 = 3.2, \quad \Omega_0 = 45 \text{ 1/с}, \quad \nu = 0.05, \quad \mu = 0.017, \quad \lambda = 0.3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}, \quad T = 20 \text{ с}$$

Полином $P(t)$ имеет четыре вещественных и два комплексных корня:

$$t_1 = 5.795, \quad t_2 = 12.32, \quad t_3 = 18.76, \quad t_4 = 31.13, \quad t_{5,6} = 11.96 \pm 24.99i$$

i	0	1	2	3	4	5	6
$a_i \cdot 10^3, \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^i$	$1.5 \cdot 10^3$	14	-22.9	1.84	-0.044	0	0
$\bar{a}_i \cdot 10^3, \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^i$	$1.5 \cdot 10^3$	14	-23.3	1.85	-0.044	0	0
$c_i \cdot 10^3, \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^i$	$0.96 \cdot 10^3$	-198	23.9	-1.36	0.028	0	0
$s_i \cdot 10^3, \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^i$	0	0.3	0.4	-0.01	0	0	0
$p_i \cdot 10^3, \text{ кг}^2 \cdot \text{м}^4/\text{с}^{i+1}$	$-0.29 \cdot 10^3$	107	-14.1	0.93	-0.04	$-0.8 \cdot 10^3$	$-0.8 \cdot 10^5$



Фиг. 6

Так как на рассматриваемый отрезок времени $t \in [0, 20]$ попадают три действительных корня, имеем чередование четырех эволюций ФТ: при $t \in (0, t_1)$ и $t \in (t_2, t_3)$ – раскручивающиеся спирали, при $t \in (t_1, t_2)$ и $t \in (t_3, T)$ – закручивающиеся спирали.

Из функции (5.11) можно получить следующие ограничения, налагаемые на законы изменения моментов инерции, обеспечивающие закручивание ФТ и, следовательно, уменьшение амплитуды угла нутации:

$$C(t)/\bar{A}(t) > \dot{C}(t)/\dot{\bar{A}}(t), \quad C(t)/\bar{A}(t) > \mu/\nu \tag{5.12}$$

Из этих условий следует, в частности, полученное выше условие (3.6) для гиростата переменного состава при линейных законах изменения моментов инерции в отсутствие диссипативных моментов ($\nu = \mu = 0$).

В заключение приведем результаты еще одного численного расчета функции $P(t)$ (5.8) и ФТ (фиг. 6) в случае, когда условия (5.9) не выполняются. Расчеты проводились для полиномиальных зависимостей моментов инерции с коэффициентами из таблицы для следующих значений параметров системы и начальных условий движения:

$$r_0 = 10, \quad G_0 = 0.3, \quad \Omega_0 = 25 \text{ 1/c}, \quad \nu = 0.02, \quad \mu = 0.01, \quad \lambda = 0.03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$$

$$M_r = -10, \quad M_z^R = -20 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2, \quad T = 21.5 \text{ с}$$

Видно, что функция $P(t)$ (5.8) имеет пять корней, а фазовая траектория – шесть эволюций.

Таким образом, разработан метод исследования поведения фазовых траекторий с помощью функции $P(t)$, который применен для качественного анализа процессов в динамике движения соосных тел и неуравновешенных гироскопов переменного состава. Некоторые результаты могут быть полезны для описания движения вокруг центра масс космических аппаратов и спутников-гироскопов, совершающих активные маневры.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-08-00325, 06-01-00355) и Президентской программы поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (МК-4707.2006.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Часть 2. М.: Просвещение, 1966. 398 с.
2. *Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М.* Теория полета неуправляемых ракет. М.: Физматгиз, 1959. 360 с.
3. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Движение системы соосных тел переменной массы // ПММ. 2004. Т.68. Вып. 6. С. 999–1009.
4. *Асланов В.С., Дорошин А.В., Круглов Г.Е.* Движение соосных тел переменного состава на активном участке спуска // Космич. исследования. 2005. Т. 43. № 3. С. 224–232.
5. *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981. 176 с.
6. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner, 1977 = *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
7. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.
8. *Appel P.* Traité Mécanique Rationnelle. Paris: Gauthier-Villars, 1953 = *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматлит, 1960. 487 с.
9. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* О двух случаях движения неуравновешенного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2006. №4. С. 42–55.

Самара
e-mail:doran@inbox.ru

Поступил в редакцию
12.II.2007