

УДК 531.36

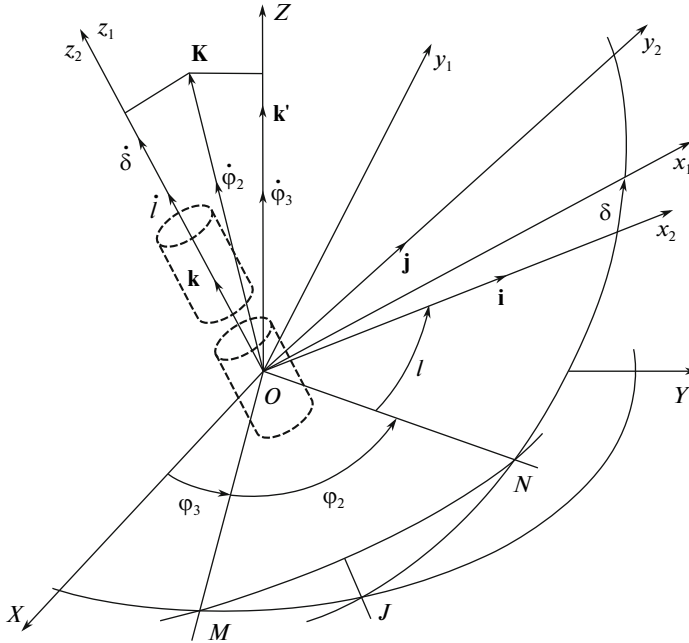
© 2010 г. В. С. Асланов, А. В. Дорошин

**ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НЕУРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСТАТА**

Рассматривается свободное пространственное движение неуровновешенного гиростата относительно центра масс. В канонических переменных Андуайе–Депри записан возмущенный гамильтониан для случая малой динамической асимметрии ротора. Проведен анализ структуры фазового пространства невозмущенной системы, выделено шесть видов возможных фазовых портретов и аналитически найдены уравнения фазовых траекторий. Для всех видов фазовых портретов получены явные аналитические зависимости переменных Андуайе–Депри от времени, соответствующие гетероклиническим орбитам. С использованием полученных аналитических решений для гетероклинических сепаратрисных орбит записана функция Мельникова возмущенной системы и численно показано наличие простых нулей, что свидетельствует о пересечении устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических точек и хаотизации движения. С помощью сечений Пуанкаре приведены иллюстрации режимов хаотического движения неуровновешенного гиростата.

В последнее время большое внимание уделяется вопросам сложной динамики и хаотизации режимов движения гиростата, связанных с переменностью состава (массы), а также с наличием внешних и внутренних возмущений различной природы [1–9]. Следует указать режимы движения, возникающие при изменении инерционно-массовых параметров во времени [1–3], действии гравитационных сил [4] и возмущений, связанных с внутренними факторами, такими как наличие внутри гиростата полостей с жидкостью [5, 6] и малой асимметрии тела-ротора [7–9]. В основном для аналитического обнаружения возникновения хаоса в известных работах используется формализм Мельникова–Виггинса, основанный на поиске простых нулей функции Мельникова, свидетельствующих о наличии пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических точек и расщеплении сепаратрис [10–13]. В ряде работ для изучения хаотического поведения используются методы Марседена–Холмса [14], а также показывается принципиальная неинтегрируемость уравнений движения [15] на основе метода В.В. Козлова [16] и доказываются отсутствие дополнительного аналитического первого интеграла. Описание движения гиростатов, как правило, проводится на основе компонент кинетического момента, а также с применением канонических переменных Андуайе–Депри [17]. Важно отметить, что в цитируемых работах аналитические зависимости для невозмущенных сепаратрис в пространстве переменных Андуайе–Депри, необходимые для записи функции Мельникова, строятся на основе известных аналитических зависимостей для гомоклинических решений в трехмерном пространстве компонент кинетического момента свободного твердого тела и уравновешенного гиростата. Переход к углам и импульсам Андуайе–Депри обычно осуществляется с помощью соотношений кинематического вида без интегрирования канонических уравнений в переменных Андуайе–Депри.

В отличие от существующих работ в настоящей статье аналитические решения для гетероклинических орбит уравновешенного гиростата находятся путем непосредственного интегрирования канонических уравнений в переменных Андуайе–Депри с учетом буфуркационных изменений структуры фазового пространства.



Фиг. 1

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим свободное пространственное движение относительно центра масс  $O$  неуровновешенного гиростата, образованного двумя телами с трехосными эллипсоидами инерции. Введем следующие системы координат (фиг. 1):  $OXYZ$  – инерциальная система координат,  $Ox_2y_2z_2$  – связанная главная система координат тела-носителя,  $Ox_1y_1z_1$  – связанная главная система координат соосного теларотора. Оси  $Oz_1$  и  $Oz_2$  связанных систем совпадают с общей осью вращения соосных тел. Векторы угловых скоростей тел представлены в проекциях на оси связанных координат  $Ox_1y_1z_1$  и  $Ox_2y_2z_2$ :  $\omega_1 = (p', q', r')^T$ ,  $\omega_2 = (p, q, r)^T$ , причем проекции угловой скорости ротора выражаются через угловую скорость тела-носителя следующим образом:

$$p' = p \cos \delta + q \sin \delta, \quad q' = q \cos \delta - p \sin \delta, \quad r' = r + \sigma \quad (\sigma = \dot{\delta}) \quad (1.1)$$

где  $\delta$  – угол относительного закручивания тела ротора (угол между осями  $Ox_2$  и  $Ox_1$ ). Выражения для кинетической энергии и кинетического момента в проекциях на оси  $Ox_2y_2z_2$  имеют вид

$$T = \frac{1}{2} (A_1 (p \cos \delta + q \sin \delta)^2 + B_1 (q \cos \delta - p \sin \delta)^2 + C_1 (r + \sigma)^2 + A_2 p^2 + B_2 q^2 + C_2 r^2) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{K} = [p(A_1 \cos^2 \delta + B_1 \sin^2 \delta + A_2) + q(A_1 - B_1) \sin \delta \cos \delta] \mathbf{i} + [p(A_1 - B_1) \sin \delta \cos \delta + q(A_1 \sin^2 \delta + B_1 \cos^2 \delta + B_2)] \mathbf{j} + [(C_1 + C_2)r + C_1 \sigma] \mathbf{k} \quad (1.3)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  – главные моменты инерции тел ( $i = 1, 2$ ). Пусть для определенности  $A_1 > B_1$  и  $A_2 > B_2$ . Введем безразмерный параметр

$$\varepsilon = (A_1 - B_1)/A_1 > 0 \quad (1.4)$$

характеризующий динамическую асимметрию тела-ротора. Отметим, что описание движения, когда  $A_2 < B_2$  и (или)  $A_1 < B_1$  может быть без потери общности сведено к заявленному случаю путем переобозначений осей связанных систем координат с пересчетом начальных условий.

Перейдем к описанию динамики системы в переменных Андуайе–Депри [17]. В этих переменных положение основного тела-носителя определяется тремя углами:  $\varphi_3$ ,  $\varphi_2$  и  $l$ , характеризующими повороты относительно оси  $OZ$ , направления кинетического момента системы и оси  $Oz_2$  соответственно. Выражения для обобщенных импульсов Андуайе–Депри, согласно определению, запишутся следующим образом:

$$L = \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}, \quad I_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{s} = K, \quad I_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}', \quad \Delta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} = C_1(r + \sigma)$$

Отметим, что обобщенные импульсы  $L$ ,  $I_3$  являются проекциями кинетического момента системы на оси  $Oz_2$  и  $OZ$ , а импульс  $I_2$  равен величине вектора кинетического момента, поэтому  $L \leq I_2$ . Как известно, компоненты кинетического момента могут быть выражены в переменных Андуайе–Депри следующим образом [17]:

$$K_{x_2} = \sqrt{I_2^2 - L^2} \sin l, \quad K_{y_2} = \sqrt{I_2^2 - L^2} \cos l, \quad K_{z_2} = L \quad (1.5)$$

Сопоставляя компоненты кинетического момента системы, используя выражения (1.5) и (1.3), можно выразить проекции угловых скоростей через переменные Андуайе–Депри

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{S} [Q \sin l - (A_1 - B_1) \sin \delta \cos \delta \cos l] \\ q &= \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{S} [R \cos l - (A_1 - B_1) \sin \delta \cos \delta \sin l] \\ r &= \frac{L - \Delta}{C_2}, \quad \sigma = \frac{\Delta}{C_1} - \frac{L - \Delta}{C_2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} S &= (A_1 + B_2)(B_1 + A_2) \sin^2 \delta + (A_1 + A_2)(B_1 + B_2) \cos^2 \delta \\ Q &= A_1 \sin^2 \delta + B_1 \cos^2 \delta + B_2, \quad R = A_1 \cos^2 \delta + B_1 \sin^2 \delta + A_2 \end{aligned}$$

При учете соотношения (1.4) экваториальные угловые скорости (1.6) можно переписать в виде, содержащем безразмерный параметр  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{S} [(A_1 + B_2) \sin l - \varepsilon A_1 \cos \delta \sin(l + \delta)] \\ q &= \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{S} [(A_1 + A_2) \cos l - \varepsilon A_1 \sin \delta \sin(l + \delta)] \end{aligned}$$

где

$$S = G - \varepsilon A_1 E(\delta), \quad G = (A_1 + B_2)(A_1 + A_2), \quad E(\delta) = A_1 + A_2 \cos^2 \delta + B_2 \sin^2 \delta$$

Подставляя выражения (1.6) в соотношение (1.2), запишем гамильтониан системы в переменных Андуайе–Депри. Если безразмерный параметр  $\varepsilon$  мал, можно разделить

выражение для гамильтониана на невозмущенную часть  $H_0$  и возмущенную  $\varepsilon H_1$ , пропорциональную первому порядку  $\varepsilon$ :

$$H = T \cong H_0(l, L, I_2, \Delta) + \varepsilon H_1(l, \delta, L, I_2) \tag{1.7}$$

$$H_0 = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \xi(l) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta^2}{C_1} + \frac{(L - \Delta)^2}{C_2} \right] \tag{1.8}$$

$$H_1 = \frac{A_1^2 (I_2^2 - L^2)}{G} \times \left\{ E(\delta) \xi(l) - \sin^2(l + \delta) - \frac{1}{2G} [(A_1 + B_2) \sin l \sin \delta - (A_1 + A_2) \cos l \cos \delta]^2 \right\} \tag{1.9}$$

$$\xi(l) = \frac{\sin^2 l}{A_1 + A_2} + \frac{\cos^2 l}{A_1 + B_2} \tag{1.10}$$

Каноническая система уравнений Гамильтона в переменных Андуайе–Депри принимает вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \tag{1.11}$$

где  $q_i = \langle l, \varphi_2, \varphi_3, \delta \rangle$ ,  $p_i = \langle L, I_2, I_3, \Delta \rangle$  – канонические координаты и импульсы.

Учитывая выражения (1.8) и (1.9), уравнения (1.11) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{\partial H_0}{\partial L} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial L}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_2}, \quad \dot{\varphi}_3 = 0, \quad \dot{\delta} = \frac{\partial H_0}{\partial \Delta} \\ \dot{L} &= -\frac{\partial H_0}{\partial l} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial l}, \quad \dot{I}_2 = 0, \quad \dot{I}_3 = 0, \quad \dot{\Delta} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \delta} \end{aligned} \tag{1.12}$$

**2. Структура фазового пространства невозмущенной системы.** В невозмущенном случае ( $\varepsilon = 0$ ), когда ротор обладает осевой динамической симметрией ( $A_1 = B_1$ ), гамильтониан (1.8) с точностью до постоянной ( $\Delta = \text{const}$ ) может быть переписан в виде

$$H_0(l, L) = g(L) + a_2 (I_2^2 - L^2) \cos 2l = h = \text{const} \tag{2.1}$$

где

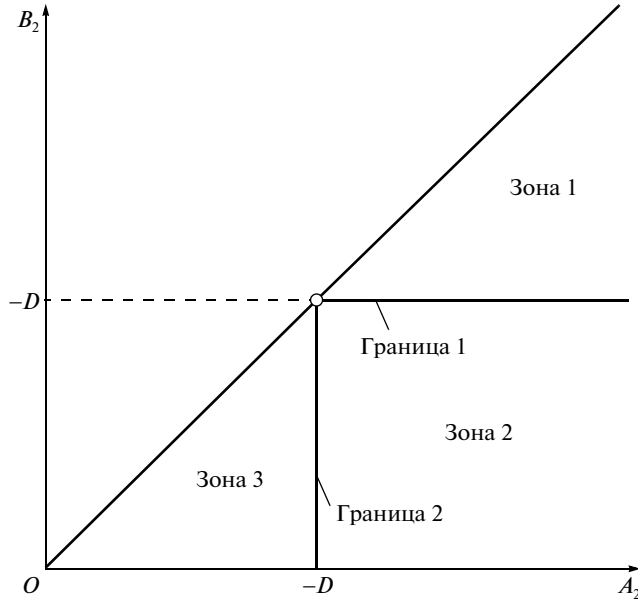
$$\begin{aligned} g(L) &= a_1 (I_2^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C_2} - \frac{L\Delta}{C_2} \\ a_1 &= \frac{2A_1 + A_2 + B_2}{4(A_1 + A_2)(A_1 + B_2)}, \quad a_2 = \frac{A_2 - B_2}{4(A_1 + A_2)(A_1 + B_2)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Гамильтониану (2.1) отвечает невозмущенная система уравнений

$$\dot{l} = \frac{\partial H_0}{\partial L} = \frac{L}{C_2} - \frac{\Delta}{C_2} - 2L(a_1 + a_2 \cos 2l), \quad \dot{L} = -\frac{\partial H_0}{\partial l} = 2a_2 (I_2^2 - L^2) \sin 2l \tag{2.3}$$

Фазовое пространство системы (2.3) представляет собой развертку следующего цилиндра (кольца):

$$U = \left\{ (l, L) \in \mathbf{R}^2 : l \in [0, 2\pi], \quad |L| \leq I_2, \quad \frac{L}{I_2} \in [-1, 1] \right\} \tag{2.4}$$



Фиг. 2

В силу уравнений (2.3) возможны следующие группы особых точек  $(l_*, L_*)$ , соответствующих положениям равновесия ( $\dot{l}(l_*, L_*) = \dot{L}(l_*, L_*) = 0$ ):

$$1) \quad l_* = \pi n, \quad L_* = \frac{\Delta}{C_2} \left( \frac{1}{C_2} - 2[a_1 + a_2] \right)^{-1} = \frac{A_1 + B_2}{A_1 + B_2 - C_2} \Delta \quad (2.5)$$

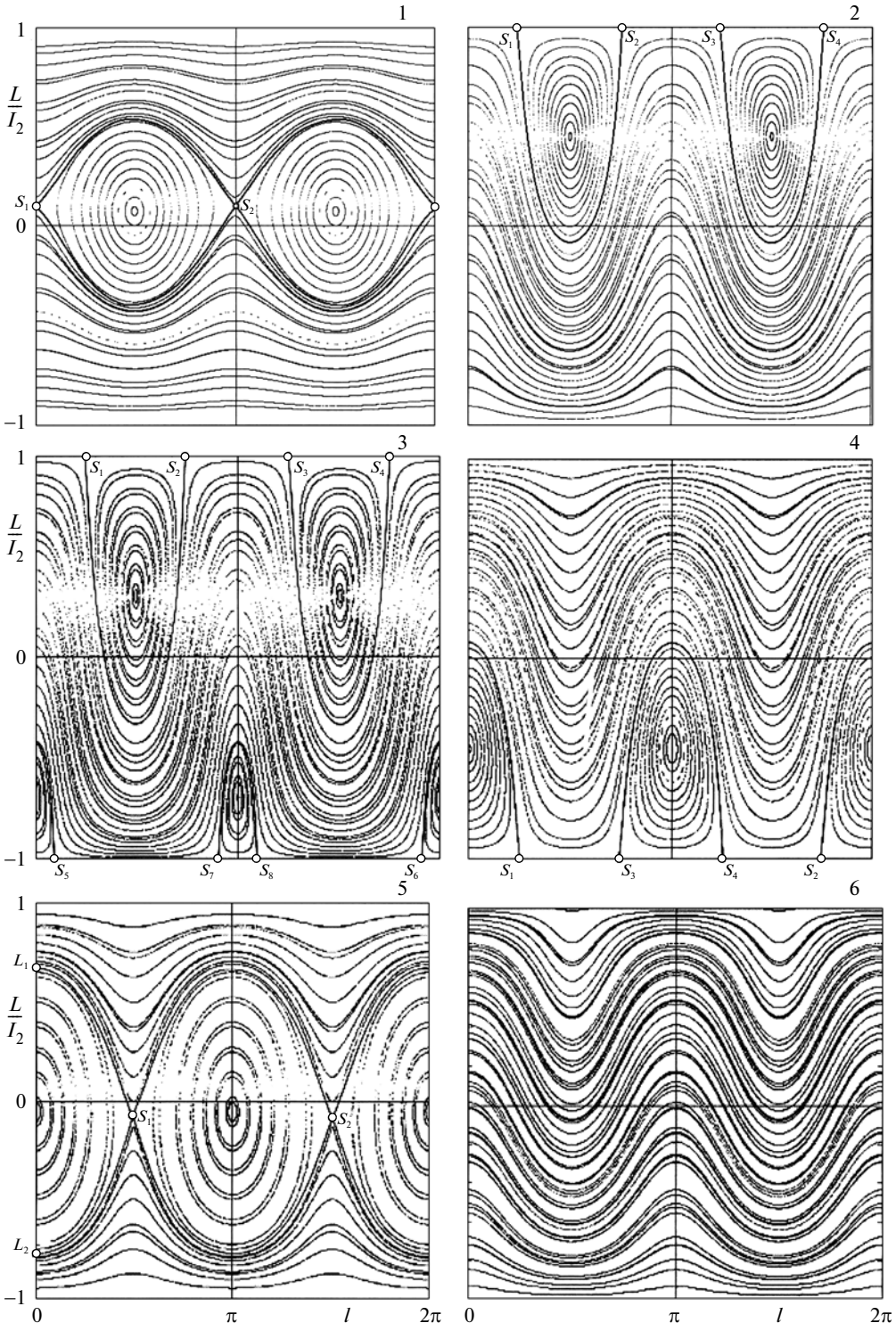
$$2) \quad l_* = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad L_* = \frac{\Delta}{C_2} \left( \frac{1}{C_2} - 2[a_1 - a_2] \right)^{-1} = \frac{A_1 + A_2}{A_1 + A_2 - C_2} \Delta \quad (2.6)$$

$$3) \quad L_* = I_2, \quad \cos 2l_* = \frac{1}{a_2} \left( \frac{I_2 - \Delta}{2I_2 C_2} - a_1 \right) \quad (2.7)$$

$$4) \quad L_* = -I_2, \quad \cos 2l_* = \frac{1}{a_2} \left( \frac{I_2 + \Delta}{2I_2 C_2} - a_1 \right) \quad (2.8)$$

Отметим, что, вообще говоря, в силу второго уравнения (2.3) на фазовом портрете (ФП) существуют особые точки с координатой  $l_* = \pi k/2$ , которые, однако, приходится разделять на две разные группы: когда  $k$  – четное число ( $k = 2n, l_* = \pi n$ ), имеют место точки (2.5), а когда  $k$  – нечетное число ( $k = 1 + 2n, l_* = \pi(1 + 2n)/2 = \pi/2 + \pi n$ ), то – точки (2.6). Видно, что соответствующие значения  $L_*$  – разные для точек (2.5) и (2.6).

Анализ этих особых точек показывает, что при разных сочетаниях моментов инерции тел возможны различные типы ФП, структура которых характеризуется бифуркационной диаграммой, показанной на фиг. 2 ( $D = A_1 - C_2$ ). Пусть для определенности  $D < 0$  и  $\Delta > 0$ . ФП системы может иметь один из шести качественных видов (фиг. 3).



Фиг. 3

Таблица 1

Зона или граница	Критическая величина $\Delta^*$	Ограничения $\tilde{\Delta} = \Delta/I_2$	Качественный вид фазового портрета (фиг. 3)
Зона 1 ( $\alpha > \beta > 0$ )	$\alpha I_2$	$0 \leq \tilde{\Delta} \leq \beta$	1
		$\beta < \tilde{\Delta} \leq \alpha$	2
Граница 1 ( $\alpha > 0, \beta = 0$ )	$\alpha I_2$	$0 \leq \tilde{\Delta} \leq \alpha$	2
Зона 2 ( $\alpha > 0, \beta < 0$ )	$\tilde{\gamma} I_2$	$\gamma < \tilde{\Delta} \leq \bar{\gamma}$	2
		$0 \leq \tilde{\Delta} \leq \gamma$	3
Граница 2 ( $\alpha = 0, \beta < 0$ )	$-\beta I_2$	$0 \leq \tilde{\Delta} \leq -\beta$	4
Зона 3 ( $0 > \alpha > \beta$ )	$-\beta I_2$	$-\alpha < \tilde{\Delta} \leq -\beta$	4
		$0 \leq \tilde{\Delta} \leq -\alpha$	5

В табл. 1 показано соответствие качественных видов и ограничений величины импульса  $\Delta$ , учитывающее различие моментов инерции в зависимости от зоны; введены следующие вспомогательные величины:

$$\alpha = 1 - \frac{C_2}{A_1 + A_2}, \quad \beta = 1 - \frac{C_2}{A_1 + B_2}, \quad \gamma = \inf\{|\alpha|, |\beta|\}, \quad \bar{\gamma} = \sup\{|\alpha|, |\beta|\} \quad (2.9)$$

Отметим, что если  $D \geq 0$ , то будем иметь только зону 1, если  $\Delta < 0$ , то будем иметь симметрично отраженную относительно координатной оси  $OI$  фазовую картину. Как видно из фиг. 3, качественные виды ФП 1 и 5 подобны маятниковому типу с двумя колебательными (в окрестностях точек типа “центр”), двумя вращательными областями (верхняя и нижняя), а также двумя сепаратрисами. Виды 1 и 5 часто встречаются в динамике твердого тела [2, 7, 17] и их, в отличие от остальных видов, можно охарактеризовать как вполне традиционные. Виды 2 и 4 содержат по две колебательные области и по одной вращательной – нижней и верхней соответственно. Вид 3 имеет четыре колебательные и одну “серединную” вращательную области. Вид 6 целиком представляет собой единственную область – вращательную. Таким образом, в зависимости от величины импульса  $\Delta$  имеется шесть качественных видов ФП. Независимо от зоны или границы при превышении импульсом  $\Delta$  критической величины  $\Delta^*$  (табл. 1) ФП приобретает вид 6 (“вращательный”), не содержащий ни одной особой точки из четырех групп.

Важно отметить, что уравнение произвольной фазовой траектории невозмущенной системы с соответствующей величиной гамильтониана  $h$ , используя выражение (2.1), можно записать в виде

$$l(L) = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{h - g(L)}{a_2(I_2^2 - L^2)} \quad (2.10)$$

**3. Гетероклинические траектории.** Для аналитического обнаружения возникновения хаоса в возмущенной системе воспользуемся методом Виггинса [12] вычисления функции Мельникова [10]. Для этого найдем в явном виде аналитические решения уравнений невозмущенного движения (2.3) для гетероклинических траекторий, соответствующих невозмущенным сепаратрисам.

Таблица 2

Зона или граница	Качественный вид фазового портрета	Случай решения	Седловые особые точки	Значение постоянной (3.2)
Зона 1	1	I	(2.5)	$h_s^+$
	2	II	(2.7)	$\tilde{h}_s^-$
Граница 1	2	VI	(2.7)	$\tilde{h}_s^-$
Зона 2	2	III	(2.7)	$\tilde{h}_s^-$
	3	IV	(2.7)	$\tilde{h}_s^-$
			(2.8)	$\tilde{h}_s^+$
Граница 2	4	VII	(2.8)	$\tilde{h}_s^+$
Зона 3	4	V	(2.8)	$\tilde{h}_s^+$
	5	I	(2.6)	$h_s^-$
Любая зона	6	Особые точки отсутствуют		

Сепаратрисы, проходящие через седловые точки, разделяют колебательные и вращательные области фазового пространства, образуют гетероклинические орбиты и определяются уравнением (2.10) с величиной гамильтониана, вычисленной в седловой точке:

$$h = h_s = H_0(l_s, L_s) \tag{3.1}$$

В зависимости от зоны и качественного вида седловыми точками, ограничивающими гетероклинические траектории, могут быть точки всех четырех типов (2.5)–(2.8). Постоянные  $h_s$  зависят от вида фазового портрета и зоны и могут принимать (табл. 2) следующие значения:

$$h_s^\pm = g_\pm(L_s) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \pm a_2)(I_2^2 - L_s^2) + \frac{L_s^2}{2C_2} - \frac{L_s \Delta}{C_2}, \quad \tilde{h}_s^\pm = \frac{I_2^2}{2C_2} \pm \frac{I_2 \Delta}{C_2} \tag{3.2}$$

В табл. 2 показаны все возможные варианты сочетаний зон и качественных видов.

С помощью соотношения (2.10) исключим координату  $l$  во втором уравнении (2.3) и приведем его к виду, содержащему под корнем разность квадратов:

$$\dot{L} = 2\sqrt{\left[ a_2(I_2^2 - L^2) \right]^2 - [h_s - g(L)]^2} = 2\sqrt{-f_+(L)f_-(L)} \tag{3.3}$$

$$f_\pm(L) = g_\pm(L) - h_s \tag{3.4}$$

Далее найдем гетероклинические сепаратрисные решения во всех случаях, указанных римскими цифрами в табл. 2.

*Случай I.* Рассмотрим сначала качественные виды 1 в зоне 1 и 5 в зоне 3 (табл. 2) – “традиционные” виды фазового пространства свободного твердого тела и уравновешенного гиростата [2, 7, 17]. Для вида 1 квадратный полином  $f_+(L)$  имеет кратный корень  $L = L_s$ ; здесь и далее под величиной  $L_s$  подразумевается значение  $L$  в соответствую-



ющей случаю седловой особой точке и постоянной  $h_s$  (см. табл. 2). Полином же  $f_-(L)$  имеет два различных корня  $L_1$  и  $L_2$  ( $L_2 < L_1$ ), которые легко находятся:

$$L_{1,2} = -\frac{\Delta \pm \sqrt{d_-}}{2C_2(a_1 - a_2) - 1} \quad (3.5)$$

Для вида 5 полином  $f_-(L)$  имеет кратный корень  $L = L_s$ , а полином  $f_+(L)$  – два различных корня:

$$L_{1,2} = -\frac{\Delta \pm \sqrt{d_+}}{2C_2(a_1 + a_2) - 1} \quad (3.6)$$

Здесь и в соотношении (3.5)

$$d_{\pm} = \left[ 1 - 4a_1C_2 + 4C_2^2(a_1^2 - a_2^2) \right] L_s^2 + 2\Delta[2C_2(a_1 \pm a_2) - 1]L_s + \Delta^2 + 4C_2I_2^2a_2[2C_2(a_1 \pm a_2) \mp 1]$$

Отметим, что корни  $L_1$  и  $L_2$  ( $L_2 < L_1$ ) соответствуют “экстремальным” точкам сепаратрис (фиг. 3, вид 5). При учете найденных корней уравнение (3.3) можно переписать в виде

$$\dot{L} = 2\sqrt{-f_+(L)f_-(L)} = 2\sqrt{-k(L - L_s)^2(L - L_1)(L - L_2)} \quad (3.7)$$

где

$$k = \left( \frac{1}{2C_2} - (a_1 + a_2) \right) \left( \frac{1}{2C_2} - (a_1 - a_2) \right) = \frac{\alpha\beta}{4C_2^2}, \quad (3.8)$$

(величины  $\alpha$  и  $\beta$  введены первыми двумя равенствами (2.9)).

В зонах 1 и 3, в которых имеют место качественные виды фазового портрета 1 и 5, величина  $k > 0$ . Диапазон изменения импульса  $L \in (L_1, L_s)$  соответствует движению по верхней сепаратрисе, а диапазон  $L \in (L_2, L_s)$  – по нижней сепаратрисе.

Разделим переменные и приведем уравнение (3.7) к следующему интегралу:

$$2t\sqrt{k} = \pm \int \frac{dL}{(L - L_s)\sqrt{(L_1 - L)(L - L_2)}} \quad (3.9)$$

При дальнейшем преобразовании выражения (3.9) следует учитывать направления движения по сепаратрисам, различия знаков величины  $(L - L_s)$  на верхней и нижней сепаратрисах, а также симметричную картину движения по сепаратрисам, начиная с “экстремальных” точек в прямом и обратном времени. С помощью замены  $x = L - L_s$  и с учетом последних замечаний, позволяющих определять знак, интеграл (3.9) сводится к известному [18]

$$2t\sqrt{k} = \int \frac{dx}{x\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{2a + bx + 2\sqrt{aR(x)}}{x} + C \quad (3.10)$$

где

$$R(x) = a + bx + cx^2, \quad a = L_s(L_1 + L_2) - L_1L_2 - L_s^2, \quad b = L_1 + L_2 - 2L_s, \quad c = -1 \quad (3.11)$$

Квадратура (3.10) справедлива только [18] при  $a > 0$ .

Можно показать, что величина  $a$ , вычисленная в случае качественного вида 1 ( $\alpha > 0$  в зоне 1), имеет положительное значение:

$$a = \frac{4}{\alpha} a_2 C_2 (I_2^2 - L_s^2) > 0$$

Для качественного вида 5 ( $\beta < 0$  в зоне 3) величина  $a$  также положительна:

$$a = -\frac{4}{\beta} a_2 C_2 (I_2^2 - L_s^2) > 0$$

Обратная замена  $L = x + L_s$  в равенстве (3.10) дает общее решение для импульса в невозмущенной системе  $\bar{L}(t)$ , соответствующего сепаратрисам для качественных видов 1 и 5 фазовых портретов:

$$\bar{L}(t) = L_s + \frac{4Ea \exp(\lambda t)}{[E \exp(\lambda t) - b]^2 - 4ac}; \quad \lambda = \lambda^{(1)} = 2\sqrt{ak} \quad (3.12)$$

Постоянная интегрирования  $E$  в решении (3.12) определяется из условия прохождения в начальный момент “экстремальной” точки, причем  $E = E_1^{(1)} = b + 2a/(L_1 - L_s)$  для верхней сепаратрисы,  $E = E_2^{(1)} = b + 2a/(L_2 - L_s)$  для нижней сепаратрисы.

Явную зависимость от времени координаты  $\bar{l}(t)$  для невозмущенной сепаратрисы, можно получить подстановкой решения (3.12) в выражение (2.9).

*Случай II.* Получим теперь решение для сепаратрис в случае качественного вида 2 фазового портрета для зоны 1 (табл. 2, фиг. 2, вид 2). Здесь седловыми особыми точками становятся точки третьего типа (2.7). Сепаратрисы  $S_1S_2$  и  $S_3S_4$ , проходящие через эти седловые точки, характеризуются величиной  $\tilde{h}_3^-$  (3.2). В этом случае оба полинома (3.4) имеют по два различных корня, один из которых

$$L = L_s = I_2 \quad (3.13)$$

Второй корень полинома  $f_+(L)$  равен

$$L_1 = 2\Delta/\beta - I_2 \quad (3.14)$$

а второй корень полинома  $f_-(L)$  имеет величину

$$L_2 = 2\Delta/\alpha - I_2 \quad (3.15)$$

Дифференциальное уравнение (3.7) при учете найденных корней может быть переписано в виде (3.9) и проинтегрировано в форме (3.10), где теперь

$$\begin{aligned} a &= r_1 r_2, \quad b = r_2 - r_1, \quad c = -1; \quad r_1 = I_2 - L_1 = 2(I_2 - \Delta/\beta), \\ r_2 &= L_2 - I_2 = 2(\Delta/\alpha - I_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из указанных в табл. 1 ограничений, накладываемых на величину  $\Delta/I_2$ , следует, что для качественного вида 2 в зоне 1 параметры  $r_1 < 0$ ,  $r_2 < 0$ , поэтому требование положительности коэффициента  $a$  для квадратуры (3.10) выполняется и решение (3.12) остается справедливым. Следует заметить, что гетероклиническая орбита  $S_3S_4$  отличается от орбиты  $S_1S_2$  лишь смещением на величину  $\pi$  по координате  $l$  и единственная постоянная интегрирования имеет вид

$$E = E^{(2)} = \frac{2\Delta C_2 (B_2 - A_2)}{(A_1 + A_2 - C_2)(A_1 + B_2 - C_2)} \quad (3.17)$$

*Случай III.* Рассмотрим качественный вид фазового портрета 2 в зоне 2 (табл. 2). В зоне 2 величина  $k$  (3.8) отрицательна. Для качественного вида 2 сепаратрисы соответствуют постоянной  $\tilde{h}_s^-$  (3.2). В этом случае, как и в предыдущем, полиномы (3.4) имеют корни (3.13), (3.14) и (3.15). В силу последних замечаний интеграл (3.9) следует переписать в виде, аналогичном (3.9) (при замене  $k$  на  $-k$  и  $L_1 - L$  на  $L - L_1$ ). После замены переменной  $x = L - I_2$  и выделения под корнем квадратного полинома интеграл приводится к квадратуре и снова позволяет записать решение  $\bar{L}(t)$  в виде (3.12) для параметров

$$\begin{aligned} k < 0, \quad a = r_1 r_2 > 0, \quad b = -r_2 - r_1, \quad c = 1 \\ r_1 = L_1 - I_2 = 2(\Delta/\beta - I_2) < 0, \quad r_2 = L_2 - I_2 = 2(\Delta/\alpha - I_2) < 0 \\ \lambda = 2\sqrt{-ak}, \quad E = -E^{(2)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

*Случай IV.* Рассмотрим качественный вид 3 фазового портрета в зоне 2 (табл. 2), который содержит четыре сепаратрисы – верхняя пара  $S_1 S_2$  и  $S_3 S_4$ , проходящая через седла (2.7) с постоянной  $\tilde{h}_s^-$  (3.2), и нижняя пара  $S_5 S_6$  и  $S_7 S_8$ , проходящая через седла (2.8) с постоянной  $\tilde{h}_s^+$  (3.2). Парные сепаратрисы отличаются друг от друга смещением на величину  $\pi$  по координате  $l$ , поэтому достаточно рассмотреть по одной верхней и нижней сепаратрисе.

Решение для верхней сепаратрисы идентично предыдущему случаю, т.е. справедливым остается решение (3.12) с параметрами (3.18).

Найдем решение для нижней сепаратрисы. Полиномы (3.4) с постоянной  $\tilde{h}_s^+$  будут иметь по два различных корня, которые, как и в случае II, определяются формулами (3.13)–(3.15), но при замене  $I_2$  на  $-I_2$ .

Выполняя аналогичные предыдущим случаям вычисления, можно получить решение  $\bar{L}(t)$  в виде (3.12) с теми же параметрами (3.18), но при замене  $I_2$  на  $-I_2$  и  $E = -E^{(2)}$  на  $E = E^{(2)}$  (теперь  $r_1 > 0, r_2 > 0$ ).

*Случай V.* Рассмотрим качественный вид 4 в зоне 3 (табл. 2), который содержит пару сепаратрис  $S_1 S_2$  и  $S_3 S_4$  (сдвигаемых на величину  $\pi$  по координате  $l$ ), проходящую через седла (2.8) с постоянной  $\tilde{h}_s^+$  (3.2). В зоне 3 параметр  $k$  (3.8) положителен. Полиномы (3.4) имеют те же корни, что и в случае IV (качественный вид 3 в зоне 2, нижняя сепаратриса). Повторяя аналогичные предыдущим случаям преобразования, получим решение  $\bar{L}(t)$  в виде (3.12) с параметрами

$$\begin{aligned} k > 0, \quad a = r_1 r_2 > 0, \quad b = r_2 - r_1, \quad c = -1 \\ r_1 = -2(\Delta/\beta + I_2) < 0, \quad r_2 = 2(\Delta/\alpha + I_2) < 0 \\ \lambda = 2\sqrt{ak}, \quad E = -E^{(2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

*Случай VI.* Рассмотрим качественный вид 2 фазового портрета на границе 1 (табл. 2), когда имеется пара сепаратрис, проходящая через седла (2.7) с постоянной  $\tilde{h}_s^-$  (3.2). Так как в рассматриваемом случае  $\beta = 0$  ( $A_1 + B_2 - C_2 = 0$ ), полиномы (3.4) принимают вид

$$f_+(L) = \frac{\Delta}{C_2}(I_2 - L), \quad f_-(L) = \left( \frac{\Delta}{C_2} - \frac{\alpha(I_2 + L)}{2C_2} \right)(I_2 - L)$$

Тогда уравнение (3.3) после замены переменных  $x = L - I_2$  приводится к интегралу

$$2t = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}; \quad a = \frac{\Delta}{2C_2^2}\chi, \quad b = \frac{\Delta}{C_2^2}(\chi I_2 - \Delta), \quad \chi = \frac{A_2 - B_2}{A_1 + A_2} \quad (3.20)$$

При имеющихся ограничениях (табл. 1) и при учете того, что на границе 1 выполняется равенство  $A_1 + B_2 = C_2$ , можно показать положительность величины  $b$ :

$$\chi = \frac{A_2 - B_2}{A_1 + A_2} = 1 - \frac{C_2}{A_1 + A_2} = \alpha, \quad b = \frac{\Delta}{C_2^2}(\alpha I_2 - \Delta) > 0$$

Тогда интегрирование приводит к следующему результату [18]:

$$2t = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} - \frac{\ln C}{\sqrt{b}}, \quad C = \text{const} \quad (3.21)$$

Откуда после обратной замены переменных и некоторых преобразований получим явную зависимость

$$\bar{L}(t) = \frac{b[E \exp(2\sqrt{b}t) + 1]^2}{a[E \exp(2\sqrt{b}t) - 1]^2} - \frac{b}{a} + I_2, \quad E = -1 \quad (3.22)$$

Значение постоянной интегрирования  $E = -1$  следует из условия прохождения “экстремальной” точки на сепаратрисе в момент времени  $t = 0$ .

*Случай VII.* Рассмотрим качественный вид 4 фазового портрета на границе 2 (табл. 2), когда имеется пара сепаратрис, проходящая через седла (2.8) с постоянной  $\tilde{h}_s^+$  (3.2). В рассматриваемом случае на границе 2 выполняются равенства

$$A_1 + A_2 - C_2 = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = (B_2 - A_2)/(A_1 + B_2)$$

и полиномы (3.4) приводятся к виду

$$f_+(L) = \left( -\frac{\Delta}{C_2} - \frac{\beta(I_2 - L)}{2C_2} \right) (I_2 + L), \quad f_-(L) = -\frac{\Delta}{C_2} (I_2 + L) \quad (3.23)$$

С помощью полиномов (3.23) после замены  $x = I_2 + L$  и разделения переменных уравнение (3.3) снова приводится к интегралу (3.20), в котором постоянные параметры имеют значения

$$a = \frac{\Delta}{2C_2^2}\beta, \quad b = \frac{\Delta}{C_2^2}(-\beta I_2 - \Delta) > 0 \quad (3.24)$$

В этом случае явная зависимость  $\bar{L}(t)$  отличается от (3.22) заменой  $I_2$  на  $-I_2$ .

Таким образом, получены аналитические выражения для всех гетероклинических решений сепаратрисных траекторий во всех зонах и для всех качественных видов фазовых портретов. Найдено два типа сепаратрисных решений, определяемых выражениями (3.12) и (3.22), которые параметрически расслаиваются на семь описанных выше случаев.

Отметим, что полученные решения найдены непосредственно в пространстве переменных  $\{l, L\}$  без перехода к углам и импульсам Андуайе–Депри от известных аналитических зависимостей для гомоклинических решений в пространстве компонент кинетического момента  $\{K_{x_2}, K_{y_2}, K_{z_2}\}$  [7, 14] с помощью соотношений (1.5).

**4. Вычисление функции Мельникова и демонстрация хаотизации.** Как известно, в динамических системах при наличии возмущений могут возникать режимы хаотическо-

го поведения, которые связывают с существенным усложнением структуры фазового пространства в окрестности невозмущенных сепаратрис. Указанное усложнение структуры фазового пространства связано с увеличением его размерности (по сравнению с невозмущенной системой), а также вызывается наличием пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических точек, образующих сепаратрисы. Указанные пересечения многообразий можно определять с помощью функции Мельникова путем обнаружения ее простых нулей. Следует также отметить, что метод функции Мельникова позволяет обнаружить лишь локальное хаотическое движение вблизи гетероклинической траектории.

Рассмотрим замкнутую динамическую систему, состоящую из четырех уравнений системы (1.12):

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{\partial H_0(l, L, \Delta, \delta)}{\partial L} + \varepsilon g_l(l, L, \Delta, \delta), \quad \dot{\delta} = \Omega(l, L, \Delta, \delta) + \varepsilon g_\delta(l, L, \Delta, \delta) \\ \dot{L} &= -\frac{\partial H_0(l, L, \Delta, \delta)}{\partial l} + \varepsilon g_L(l, L, \Delta, \delta), \quad \dot{\Delta} = \varepsilon g_\Delta(l, L, \Delta, \delta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} g_l(l, L, \Delta, \delta) &= \frac{\partial H_1}{\partial L}, \quad g_\delta(l, L, \Delta, \delta) \equiv 0, \quad \Omega(l, L, \Delta, \delta) = \frac{\partial H_0}{\partial \Delta} \\ g_L(l, L, \Delta, \delta) &= -\frac{\partial H_1}{\partial l}, \quad g_\Delta(l, L, \Delta, \delta) = -\frac{\partial H_1}{\partial \delta} \end{aligned}$$

Из уравнений (1.12) следует, что  $I_2, I_3, \varphi_3$  – постоянные величины. Отсюда и из того обстоятельства, что координата  $\varphi_2$  не входит в систему (4.1), следует, что система замкнутая. Решение для координаты  $\varphi_2$  из системы (1.12) может быть получено отдельно после интегрирования системы (4.1).

Используя формализм Мельникова–Виггинса [12], можно записать функцию Мельникова для четырехмерной системы (4.1) в виде

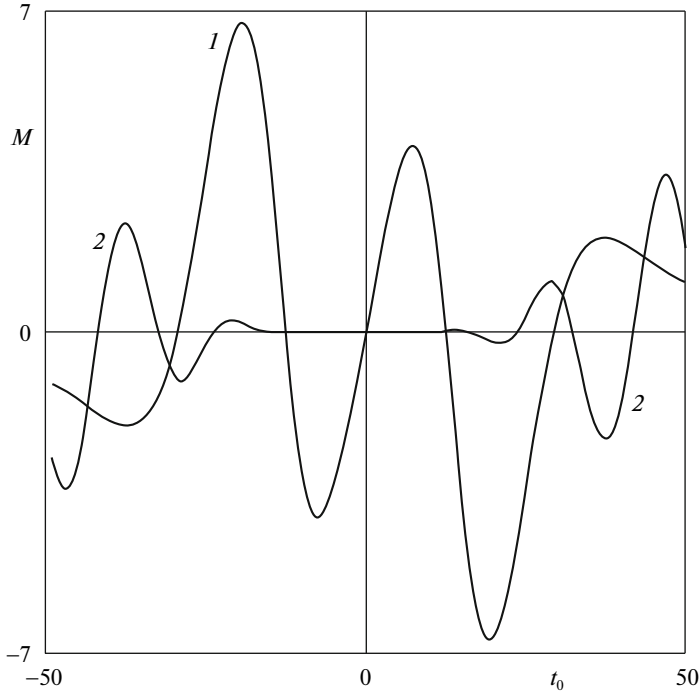
$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g_L \frac{\partial H_0}{\partial L} + g_l \frac{\partial H_0}{\partial l} + g_\Delta \frac{\partial H_0}{\partial \Delta} \right]_{(\bar{l}(t), \bar{L}(t), \bar{\Delta}, \bar{\delta}(t+t_0))} dt - \\ &- \frac{\partial H_0}{\partial \Delta}(l_s, L_s) \int_{-\infty}^{\infty} g_\Delta(\bar{l}(t), \bar{L}(t), \bar{\Delta}, \bar{\delta}(t+t_0)) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\bar{\Delta} = \text{const}$  – решение для импульса  $\Delta(t)$  порождающей невозмущенной системы ( $\varepsilon = 0$ ), а функция  $\bar{\delta}(\tau)$  представляет собой следующее решение вдоль сепаратрисы:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(\tau) &= \int \Omega(\bar{l}(\tau), \bar{L}(\tau), \bar{\Delta}) d\tau = \int \left( \frac{\bar{\Delta}}{C_1} - \frac{(\bar{L}(\tau) - \bar{\Delta})}{C_2} \right) d\tau = \\ &= \frac{\bar{\Delta}(C_2 + C_1)\tau}{C_1 C_2} - \frac{J(\tau)}{C_2} + \text{const} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$J(\tau) = \int \bar{L}(\tau) d\tau \quad (4.4)$$



Фиг. 4

Отметим, что в рассматриваемом случае введено и используется сечение фазового пространства с помощью отображения Пуанкаре на основе условия  $\delta_0 = \delta \bmod 2\pi$ ,  $\delta_0 = \text{const}$  (операция  $a \bmod b$  означает получение остатка от деления  $a$  на  $b$ ).

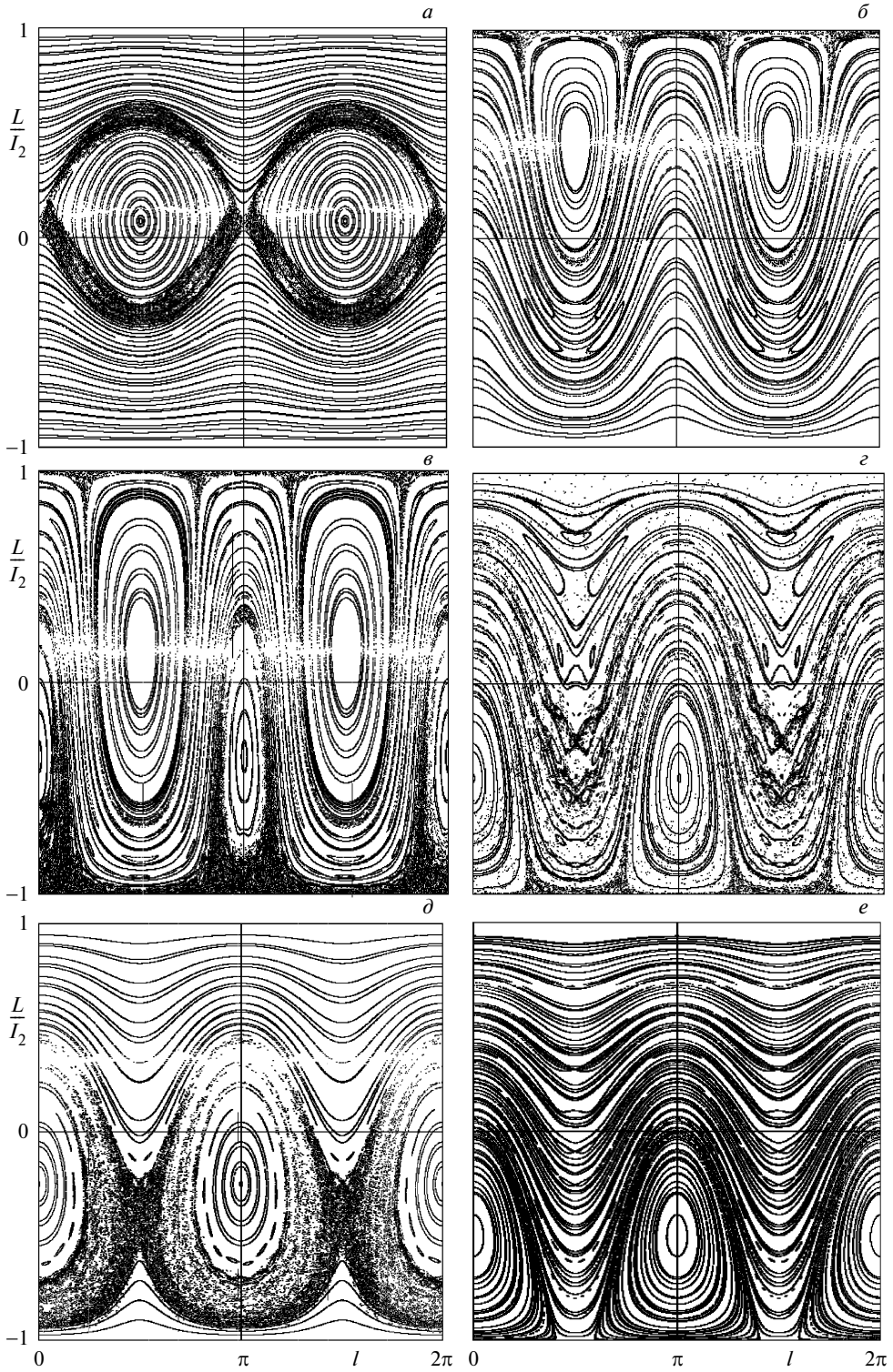
Интеграл (4.4) в выражении (4.3) вычисляется аналитически в зависимости от вида решения  $\bar{L}(\tau)$  и сочетания параметров. Для решения (3.12) этот интеграл выражается в обратных гиперболических и тригонометрических функциях ( $a > 0$ )

$$\begin{aligned}
 J(\tau) &= L_s \tau - \frac{2a}{\lambda \sqrt{ac}} \operatorname{arcth} \frac{E \exp(\lambda \tau) - b}{2\sqrt{ac}}, \quad c > 0 \\
 J(\tau) &= L_s \tau + \frac{2a}{\lambda \sqrt{a|c|}} \operatorname{arctg} \frac{E \exp(\lambda \tau) - b}{2\sqrt{a|c|}}, \quad c < 0
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Для решений вида (3.22) интеграл (4.4) принимает вид

$$J(\tau) = -\frac{2\sqrt{b}}{a[E \exp(2\sqrt{b}\tau) - 1]} \pm I_2 \tau
 \tag{4.6}$$

Используя решения (3.12), (3.22), (4.5) и (4.6), можно записать явное выражение для функции Мельникова (4.2) и вычислить ее на исследуемой сепаратрисе в любой из трех зон и для всех качественных видов фазовых портретов. Здесь ограничимся примером вычисления функции Мельникова в одной из зон (зона 3). Численный расчет демонстрирует наличие нулей функции Мельникова (см. фиг. 4, где  $A_1 = 3$ ,  $C_1 = 2$ ,  $A_2 = 8$ ,  $B_2 = 7$ ,  $C_2 = 12 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $\bar{\Delta} = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ ,  $\delta_0 = 0$ ) и, следовательно, расщепление



Фиг. 5

Таблица 3

Фрагмент фиг. 5	Зона или граница	$A_2$	$B_2$	$C_2$	$A_1$	$C_1$	$\varepsilon$	$\Delta_0$ , кг · м <sup>2</sup> /с
		кг · м <sup>2</sup>						
а	Зона 1	15	8	6	5	4	$10^{-2}$	0.5
б	Граница 1	7	3	8	5	4	$2 \cdot 10^{-3}$	1.5
в	Зона 2	7	2	8	5	4	$5 \cdot 10^{-4}$	0.5
г	Граница 2	9	6	12	3	2	$2 \cdot 10^{-2}$	1.5
д	Зона 3	8	7	12	3	2	$5 \cdot 10^{-4}$	0.5
е	Зона 3	8	7	12	3	2	$2 \cdot 10^{-3}$	1.0

сепаратрис и хаотизацию движения, что также наглядно проявляется на сечениях Пуанкаре в виде хаотических слоев в окрестностях сепаратрис (фиг. 5, табл. 3). На фиг. 4 кривая 1 соответствует функции Мельникова, вычисленной на верхней сепаратрисе, а кривая 2 – на нижней. Сечения Пуанкаре (фиг. 5) построены для параметров, указанных в табл. 3 и следующих общих начальных значений:

$$I_2 = 10, \quad I_3 = 1, \quad \varphi_2 = 1, \quad \varphi_3 = 1, \quad \delta_0 = 0$$

Последний фрагмент *е* фиг. 5 характеризует стабилизирующее действие величины  $\Delta$  и демонстрирует уменьшение хаотической зоны по сравнению с фрагментом *д* даже при некотором увеличении значения малого параметра.

Отметим, что динамические эффекты расщепления сепаратрис принципиально препятствуют интегрируемости уравнений движений. Так, была показана [15] неинтегрируемость уравнений движения асимметричного гиростата в окрестности  $\Delta = 0$  на основе метода В.В. Козлова [16], доказывающего отсутствие дополнительного аналитического первого интеграла.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (09-01-00384) и Президентской программы поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (МК-516.2008.8).

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Doroshin A.V.* Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system // Intern. J. Non-Linear Mech. 2010. V. 45. № 2. P. 193–205.
2. *Inarrea M., Lanchares V.* Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 5. P. 997–1018.
3. *Inarrea M., Lanchares V., Rothos V. M., Salas J. P.* Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2003. V. 13. № 2. P. 393–409.
4. *Tong X., Tabarrok B., Rimrott F. P. J.* Chaotic motion of an asymmetric gyrostat in the gravitational field // Intern. J. Non-Linear Mech. 1995. V. 30. № 3. P. 191–203.
5. *Zhou L., Chen Y., Chen F.* Stability and chaos of a damped satellite partially filled with liquid // Acta Astronaut. 2009. № 65. P. 1628–1638.
6. *Kuang J.L., Meehan P.A., Leung A.Y.T.* On the chaotic rotation of a liquid-filled gyrostat via the Melnikov–Holmes–Marsden integral // Intern. J. Non-Linear Mech. 2006. V. 41. № 4. P. 475–490.
7. *Kuang J., Tan S., Arichandran K., Leung A.Y.T.* Chaotic dynamics of an asymmetrical gyrostat // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36. № 8. P. 1213–1233.
8. *Kuang J., Tan S., Leung A.Y.T.* Chaotic attitude tumbling of an asymmetric gyrostat in a gravitational field // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2002. V. 25. № 4. P. 804–814.
9. *Peng J., Liu Y.* Chaotic motion of a gyrostat with asymmetric rotor // Intern. J. Non-Linear Mech. 2000. V. 35. № 3. P. 431–437.



10. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. № 12. С. 3–52.
11. Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods. N.Y.: Springer. 1988. 494 p.
12. Wiggins S., Shaw S.W. Chaos and three-dimensional horseshoe in slowly varying oscillators // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 4. P. 959–968.
13. Aslanov V. S. Chaotic behavior of the biharmonic dynamics system // Intern. J. Math. and Math. Sci. ID 319179. 2009. V. 2009. 18 p.
14. Holmes P. J., Marsden J. E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups // Indiana Univ. Math. J. 1983. V. 32. № 2. P. 273–309.
15. Ивин Е.А. К вопросу об интегрируемости задачи о движении по инерции связки двух твердых тел // Вестник МГУ. Сер. I. Математика. механика. 1986. № 2. С. 63–66.
16. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
17. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1108 с.

Самара  
e-mail: aslanov\_vs@mail.ru  
doran@inbox.ru

Поступила в редакцию  
3.III.2009