КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2002, том 40, № 2, с. 1–8

УДК 629.78.015

СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА ЧАСТИЧНОЙ ЗАКРУТКОЙ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ НЕУПРАВЛЯЕМОГО СПУСКА

© 2002 г. В. С. Асланов, А. В. Дорошин

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 04.07.2000 г.

Рассматривается стабилизация спускаемого аппарата (СА) способом частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска в атмосферу. Аппарат в этом случае представляет собой составную конструкцию, состоящую из двух твердых тел – спускаемой капсулы и стабилизирующего блока, приводимого во вращательное движение. Строится модель пространственного движения спускаемого аппарата как системы соосных твердых тел, вращающихся относительно общей оси симметрии. Проводится исследование свободного движения, а также анализ устойчивости стационарных режимов. Рассматривается пространственное движение системы при наличии малой асимметрии, связанной со смещением осей динамических симметрий тел относительно оси вращения и находятся приближенные решения для параметров движения свободной системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При осуществлении неуправляемого спуска СА необходимо обеспечить попадание в определенную область земной поверхности с наименьшей величиной рассеивания точек падения, а также выполнить требования, связанные с уровнем перегрузок и условиями работы парашютной системы. Попадание в заданную область с требуемой величиной рассеивания точек посадки определяется начальными условиями входа СА в атмосферу и характеристиками аппарата. Для обеспечения требуемых углов входа в плотные слои атмосферы необходимо определенным образом сориентировать СА и выдать тормозной импульс. Стабилизация СА осуществляется его закруткой относительно продольной оси. После входа СА в атмосферу производится гашение угловой скорости закрутки для выполнения условий работы парашютной системы, а также предотвращения возникновения резонансных режимов движения [1, 2]. Гашение угловой скорости СА может осуществляться с помощью системы грузов на разматывающихся тросах, отделяемых в конце процесса [3].

Одним из способов стабилизации, исключающим последующее гашение угловой скорости всего аппарата, является его частичная закрутка, при которой во вращательное движение приводится какой-либо блок СА, отделяемый после входа в атмосферу. При этом возвращаемая часть СА не приводится во вращательное движение. Аппарат в данном случае представляет собой механическую систему двух твердых тел, имеющих общую ось вращения. Одно из этих тел является стабилизирующим блоком, а другое представляет собой СА. Аппараты, допускающие частичную закрутку, могут быть использованы в системах дистанционного зондирования земной поверхности для доставки полученного фотоматериала на Землю: тело *1* представляет собой стабилизирующий блок с тормозной двигательной установкой, отсоединяемый после входа в атмосферу, а тело *2* – непосредственно спускаемый аппарат (рис. 1).

Известны работы [4, 5], посвященные исследованию переходных режимов движения и устойчивости стабилизируемых состояний спутников с двойным вращением, осесимметричных гиростатов, а также некоторых более общих систем, состоящих из многих соосных маховиков.

Ставится задача проведения исследования свободного движения соосных тел, в том числе при

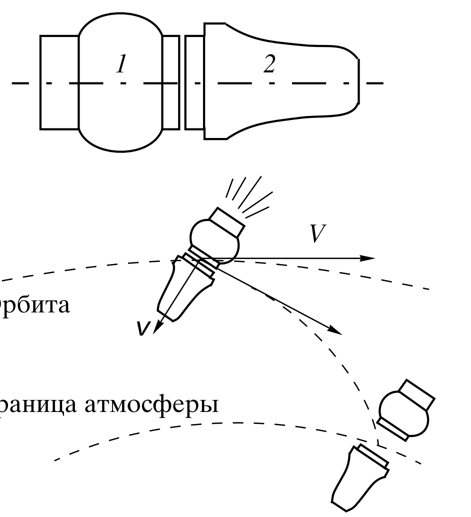

Рис. 1. Общий вид СА и процесс входа в атмосферу.

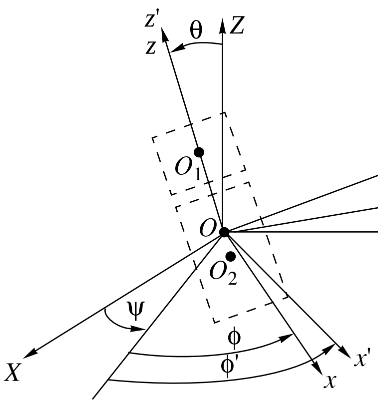

Рис. 2. Схема соосных тел и используемые системы координат.

наличии асимметрии, обусловленной малым смещением продольной оси симметрии одного из тел от оси вращения, а также анализа устойчивости стационарных режимов.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

Пусть система координат *OXYZ* движется поступательно в инерциальном пространстве, а ее начало совпадает с центром масс системы соосных тел. Системы координат *Ox'y'z'* и *Oxyz* связаны с телами *1* и *2* соответственно и вращаются относительно системы *OXYZ*. Оси *Oz* и *Oz'* связанных систем совпадает с общей осью вращения тел (рис. 2). Положение соосных тел относительно системы *OXYZ* будем характеризовать эйлеровыми углами: θ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ', φ – углы собственных вращений тел *1* и *2*.

Векторы угловых скоростей вращений тел *1* и *2* $\boldsymbol{\omega}' = (p', q', r')$ и $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ представлены в проекциях на оси своих связанных систем координат (*Ox'y'z'* и *Oxyz*) и выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$p' = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi' + \dot{\theta}\cos\varphi',$$

$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$q' = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi' - \dot{\theta}\sin\varphi',$$

$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \quad r' = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}'.$$

Введем угол и скорость относительного закручивания:

$$\delta = \varphi' - \varphi, \quad \sigma = \dot{\delta}.$$

Компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}' = (p', z', r')$, выраженные через компоненты *p*, *q*, *r* угловой скорости тела *2* имеют вид:

$$\begin{aligned} p' &= p\cos\delta + q\sin\delta, \\ q' &= q\cos\delta - p\sin\delta, \\ r' &= r + \delta. \end{aligned} \tag{1}$$

Для получения уравнений движения системы соосных тел применим теорему об изменении кинетического момента [6], выбирая в качестве полюса *O* центр масс системы:

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e. \tag{2}$$

Пусть рассматриваемая система включает в себя динамически симметричные тела. Главные моменты инерции тел *1* и *2*, вычисленные в своих связанных системах координат *Ox'y'z'* и *Oxyz*, обозначим как A_1, C_1, и A_2, C_2. Введенные моменты инерции не являются центральными, так как начала связанных с телами систем координат *Ox'y'z'* и *Oxyz* совпадают с центром масс системы двух тел. Для указанных моментов инерции можно записать:

$$A_i = m_i l_i^2 + \bar{A}_i, \quad C_i = \bar{C}_i, \quad (i = 1, 2),$$

где m_i, $\bar{A}_i$, $\bar{C}_i$ – масса и собственные главные центральные моменты инерции тела *i*, l_i – расстояние между центром масс системы тел и центром масс тела *i*.

Кинетический момент системы относительно центра масс равен векторной сумме кинетических моментов тел *1* и *2* относительно точки *O*: $\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$.

Вычисляя производную кинетического момента системы как суммы кинетических моментов тел, используя при этом локальные производные в связанных системах *Ox'y'z'* и *Oxyz*, уравнение (2) можно записать в системе *Oxyz*:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}\left[\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{K}_1\right] + \left[\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times K_2\right] = \mathbf{M}_\text{O}^e, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega}$ – угловые скорости вращения связанных систем координат относительно движущейся поступательно системы *OXYZ*; знак “~” обозначает локальную производную в соответствующей подвижной системе координат; $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ – тензор перехода от системы координат *Ox'y'z'* к системе *Oxyz*; $\mathbf{K}_1 = (A_1p', A_1q', C_1r')$, $\mathbf{K}_2 = (A_2p, A_2q, C_2r)$.

Перепишем уравнение (3) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix}\cos\delta & -\sin\delta & 0\\ \sin\delta & \cos\delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}A_1\dot{p}'\\ A_1\dot{q}'\\ C_1\dot{r}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p'\\ q'\\ r'\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A_1p'\\ A_1q'\\ C_1r'\end{bmatrix}\right)+ \tag{4}$$

$$+\begin{bmatrix}A_2\dot{p}\\ A_2\dot{q}\\ C_2\dot{r}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A_2p\\ A_2q\\ C_2r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_z\end{bmatrix},$$

где $M_x = M_{1,x} + M_{2,x}$, $M_y = M_{1,y} + M_{2,y}$; $M_z = M_{1,z} + M_{2,z}$ – компоненты моментов внешних сил, представляющие собой суммы соответствующих проекций моментов, приложенных к телам *1* и *2* соответственно.

Принимая во внимание выражения (1) для компонент угловых скоростей тел, последнее матричное выражение можно свести к следующей системе скалярных уравнений:

$$\begin{gathered}(A_1+A_2)\dot{p}-(A_1+A_2-C_2)qr+C_1q(r+\sigma) = M_x,\\ (A_1+A_2)\dot{q}-(C_2-A_1-A_2)pr-\\ -C_1p(r+\sigma) = M_y,\\ C_1(\dot{r}+\dot{\sigma})+C_2\dot{r} = M_z.\end{gathered} \tag{5}$$

Для получения уравнения относительного движения тел воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода, соответствующим углу относительного закручивания δ. Запишем выражения для кинетической энергии системы и обобщенной силы:

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{K}_1\cdot\boldsymbol{\omega}'+\frac{1}{2}\mathbf{K}_2\cdot\boldsymbol{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}[(A_1+A_2)(p^2+q^2)+C_2r^2+C_1(r^2+2r\sigma+\sigma^2)],$$

$$Q_\delta = M_{1z}+M_\delta,$$

где M_δ – момент внутреннего взаимодействия тел вдоль оси вращения.

Величины p, q, r явно не зависят от угла относительного закручивания δ и скорости относительной закрутки ($\sigma = \dot{\delta}$), поэтому уравнение относительного движения будет иметь вид:

$$C_1(\dot{r}+\dot{\sigma}) = M_{1,z}+M_\delta. \tag{6}$$

Добавим к динамическим уравнениям (5) и (6) кинематические уравнения для углов Эйлера:

$$\begin{gathered}\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\ \ \dot{\varphi} = r-\operatorname{ctg}\theta(p\sin\varphi+q\cos\varphi),\\ \dot{\psi} = \frac{1}{\sin\theta}(p\sin\varphi+q\cos\varphi),\quad \dot{\delta} = \sigma.\end{gathered} \tag{7}$$

3. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

Пусть моменты от внешних сил, действующих на механическую систему отсутствуют ($M_x = M_y = M_z = 0$), а между соосными телами действует постоянный момент относительного закручивания: $M_\delta = M$.

В этом случае система уравнений (5) и (6) запишется в виде:

$$\begin{gathered}\dot{p} = (A_1+A_2)^{-1}([A_1+A_2-C_2]qr-C_1q[r+\sigma]),\\ \dot{q} = (A_1+A_2)^{-1}\times\\ \times([C_2-A_1-A_2]pr+C_1p[r+\sigma]),\\ \dot{r} = \frac{-M}{C_2},\quad \dot{\sigma} = \frac{M(C_1+C_2)}{C_1C_2}.\end{gathered} \tag{8}$$

Следуя [6], выберем поступательно движущуюся систему координат так, чтобы ось OZ совпадала с неизменным направлением вектора кинетического момента. В этом случае выражения для угловых скоростей и углов Эйлера имеют вид:

$$\begin{gathered}p = \frac{K}{A_1+A_2}\sin\theta_0\sin\varphi,\quad q = \frac{K}{A_1+A_2}\sin\theta_0\cos\varphi,\\ r = \frac{-Mt}{C_2}+r_0,\quad \sigma = \frac{M(C_1+C_2)}{C_1C_2}t+\sigma_0,\\ \theta = \theta_0,\quad \varphi = \frac{-Mt^2}{2C_2}+\left(r_0-\frac{K}{A_1+A_2}\cos\theta_0\right)t+\varphi_0,\\ \psi = \frac{K}{A_1+A_2}t+\psi_0,\quad \delta = \frac{M(C_1+C_2)}{2C_1C_2}t^2+\sigma_0t+\delta_0,\end{gathered} \tag{9}$$

где K – величина кинетического момента системы.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Определим возможные стационарные режимы движения свободной системы, приравняв для этого нулю производные угловых скоростей в уравнениях (8):

$$\begin{gathered}(A_1+A_2)^{-1}([A_1+A_2-C_2]qr-C_qq[r+\sigma]) = 0,\\ (A_1+A_2)^{-1}([C_2-A_1-A_2]pr+C_1p[r+\sigma]) = 0,\\ \dot{r} = 0,\quad \dot{\sigma} = 0.\end{gathered}$$

Существуют два стационарных режима:

$$\begin{gathered}1).\ p = p_0,\quad q = q_0,\quad r = r_0,\\ \sigma = \frac{A_1+A_2-C_1-C_2}{C_1}r_0,\\ 2).\ p = 0,\quad q = 0,\quad r = r_0,\quad \sigma = \sigma_0,\end{gathered}$$

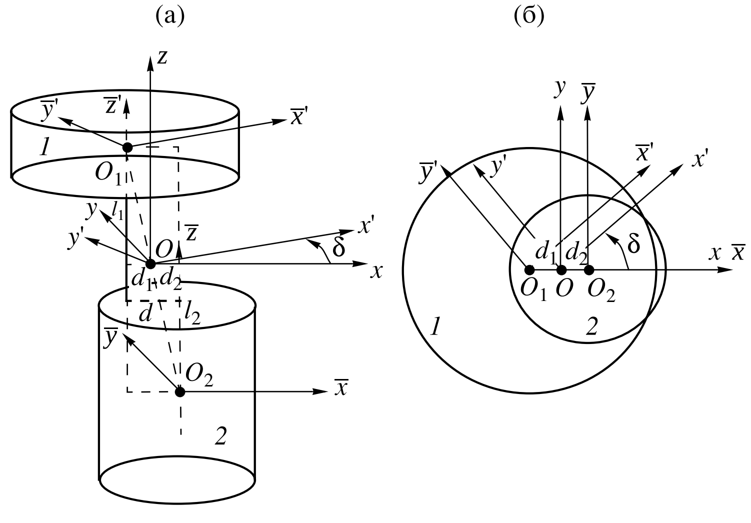

Рис. 3. Соосные тела при наличии малой асимметрии.

где p_0, q_0, r_0, σ_0 – постоянные величины.

Проведем анализ устойчивости первого режима. Введем малые возмущения угловых скоростей Δp, Δq, Δr, $\Delta\sigma$ и запишем уравнения возмущенного движения:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = (A_1 + A_2)^{-1} \times$$
$$\times([A_1 + A_2 - C_2]\Delta r - C_1[\Delta r + \Delta\sigma])(q_0 + \Delta q),$$
$$\frac{d\Delta q}{dt} = (A_1 + A_2)^{-1} \times \tag{10}$$
$$\times([C_2 - A_1 - A_2]\Delta r + C_1[\Delta r + \Delta\sigma])(p_0 + \Delta p),$$
$$\frac{d\Delta r}{dt} = 0, \quad \frac{d\Delta\sigma}{dt} = 0.$$

Общее решение системы (10) имеет следующий вид:

$$\Delta p = D_1\cos\chi t + D_2\sin\chi t - p_0,$$
$$\Delta q = D_2\cos\chi t - D_1\sin\chi t - q_0, \tag{11}$$
$$\Delta\sigma = (\Delta\sigma)_0, \quad \Delta r = (\Delta r)_0,$$

где $\chi = (A_1 + A_2)^{-1}([A_1 + A_2 - C_2]\Delta r - C_1[\Delta r + \Delta\sigma])$, $D_1 = (\Delta p)_0 + p_0$, $D_2 = (\Delta q)_0 + q_0$, а $(\Delta p)_0$, $(\Delta q)_0$, $(\Delta\sigma)_0$, $(\Delta r)_0$ – начальные значения малых возмущений.

Из решений (11) видно, что первый стационарный режим является устойчивым в линейном приближении в пространстве угловых скоростей. Можно показать, что при первом стационарном режиме векторы кинетического момента системы и угловой скорости тела *2* сонаправлены: $\mathbf{K} = (A_1 + A_2)$.

Второй режим допускает исследование на устойчивость с помощью функции Ляпунова: $L = (\Delta p)^2 + (\Delta q)^2 + (\Delta r)^2 + (\Delta\sigma)^2$. Производная этой функции в силу уравнений соответствующей возмущенной системы тождественно равна нулю, следовательно, этот режим является устойчивым и характеризует вращения тел вокруг главной оси эллипсоида инерции, совпадающей с общей осью вращения тел.

5. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛОЙ АСИММЕТРИИ

Рассмотрим движение системы соосных тел при наличии малой асимметрии, связанной со смещением d общей оси вращения от оси динамической симметрии тела *2* (рис. 3). При этом ось динамической симметрии тела *1* совпадает с осью вращения и параллельна оси динамической симметрии тела *2*. В этом случае центр масс системы O будет принадлежать отрезку O_1O_2, образованному центрами масс тел и не будет изменять своего положения относительно тела *2*.

Введем в рассмотрение следующие системы координат. $Oxyz$ – основная подвижная система координат, оси которой жестко связаны с телом *2*, причем ось Ox лежит в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения и совпадает с проекцией отрезка O_1O_2 на эту плоскость, ось Oy лежит в указанной плоскости. $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ – главная центральная система координат, связанная с телом *2*, оси которой параллельны осям системы $Oxyz$. $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$ – главная центральная система координат, связанная с телом *1*. $Ox'y'z'$ – система координат с началом в центре масс O, оси которой параллельны осям системы $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$. За угол относительной закрутки примем угол между экваториальными осями Ox и Ox'. Пусть m_1 и m_2 – массы тел *1* и *2* соответственно, а l – расстояние между центрами масс тел O_1 и O_2.

Проекции угловой скорости тела *2* в системах $Oxyz$ и $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ одинаковы и равны p, q, r, также одинаковы и равны p', q', r' проекции угловой скорости тела *1* в системах $Ox'y'z'$ и $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$, так как соответствующие оси являются параллельным. Расстояния между центрами масс тел *1*, *2* и центром масс системы в направлении оси вращения соответственно равны (рис. 3): $l_1 = lm_2/(m_1 + m_2)$, $l_2 = lm_1/(m_1 + m_2)$, а в направлении, перпендикулярном оси вращения: $d_1 = dm_2/(m_1 + m_2)$, $d_2 = dm_1/(m_1 + m_2)$.

Малое смещение d (рис. 3) приводит к изменению моментов инерции тела *2* в системе $Oxyz$:

$$I_{xx} = \bar{A}_2 + m_2 l_2^2, \quad I_{yy} = \bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2,$$

$$I_{zz} = \bar{C}_2 + m_2 d_2^2,$$

$$I_{xy} = I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = -m_2(-l_2)d_2 = m_2 l_2 d_2,$$

где $\bar{A}_2$, $\bar{C}_2$ – экваториальный и продольный моменты инерции тела *2*, вычисленные в центральной системе $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента в системе координат $Oxyz$ в виде (3). Для этого найдем проекции кинетических моментов тел *1* и *2* на оси систем $Ox'y'z'$ и $Oxyz$ соответственно. Кинетический момент тела *1* вычисляется как сумма кинетических моментов движения центра масс тела *1* – $\mathbf{K}_1^e$ и кинетического момента тела *1* при его вращении относительно центра масс – $\mathbf{K}_1^r$: $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_1^r$.

В проекциях на оси системы координат $Ox'y'z'$ получим:

$$\mathbf{K}_1 = m_1[\delta]^{-1}\left(\begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix} = $$
$$= m_1[\delta]^{-1}\begin{bmatrix} l_1^2 p + d_1 l_1 r \\ q(l_1^2 + d_1^2) \\ d_1^2 r + d_1 l_1 p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где $\bar{A}_1$, $\bar{C}_1$ – главные экваториальные и продольный центральные моменты инерции тела *1*, а $[\delta] = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матрица перехода от системы координат $Ox'y'z'$ к системе $Oxyz$.

Кинетический момент тела *2* запишем в системе $Oxyz$:

$$\mathbf{K}_2 = \hat{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2)p + m_2 l_2 d_2 r \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2)q \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2)r + m_2 l_2 d_2 p \end{bmatrix}. \tag{13}$$

С учетом (12) и (13) векторное уравнение (3) в системе координат $Oxyz$ примет вид:

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2)\dot{p} + m_2 l_2 d_2 \dot{r} \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2)\dot{q} \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2)\dot{r} + m_2 l_2 d_2 \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2)p + m_2 l_2 d_2 r \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2)q \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2)r + m_2 l_2 d_2 p \end{bmatrix} +$$
$$+ [\delta]\left\{\frac{d}{dt}\left(m_1 p[\delta]^{-1}\begin{bmatrix} l_1^2 p + d_1 l_1 r \\ q(l_1^2 + d_1^2) \\ d_1^2 + d_1 l_1 p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \times\right. \tag{14}$$
$$\left.\times\left(m_1[\delta]^{-1}\begin{bmatrix} l_1^2 p + d_1 l_1 r \\ q(l_1^2 + d_1^2) \\ d_1^2 r + d_1 l_1 p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix}\right)\right\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}.$$

Используя выражения (1), уравнения (14) можно переписать в следующем виде:

$$(A_1 + A_2)\dot{p} + qr(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) + C_1 q\sigma =$$
$$= M_x - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(pq + \dot{r}),$$
$$(A_1 + A_2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\dot{q} +$$
$$+ pr(A_1 - C_1 + A_2 - C_2 - m_1 d_1^2 - m_2 d_2^2) - C_1 p\sigma = \tag{15}$$
$$= M_y - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(r^2 - p^2),$$
$$(C_1 + C_2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\dot{r} + C_1\dot{\sigma} =$$
$$= M_z - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(\dot{p} - qr) - (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)pq,$$

где $A_i = \bar{A}_i + m_i l_i^2$, $C_i = \bar{C}_i$ $(i = 1, 2)$.

Уравнение относительного движения тел в рассматриваемом случае получается аналогичным уравнению (6). Система (15) совместно с уравнением (6), представляют собой динамические уравнения движения соосных тел при наличии указанного рода асимметрии.

В качестве малого параметра ε выберем безразмерную величину, характеризующую смещение осей динамических симметрий тел от оси вращения:

$$\varepsilon = \frac{m_1 d_1 l_1 + m_2 d_2 l_2}{A_1 + A_2} = \frac{m_1 m_2 dl}{(m_1 + m_2)(A_1 + A_2)}. \qquad (16)$$

Пусть моменты внешних сил и внутреннего взаимодействия отсутствуют, тогда, с точностью порядка ε, динамические уравнения можно записать:

$$\begin{aligned} &\dot{p} + aqr + bq\sigma = -\varepsilon(pq + \dot{r}), \\ &\dot{q} - apr - bp\sigma = -\varepsilon(r^2 - p^2), \\ &(C_1 + C_2)\dot{r} + C_1\dot{\sigma} = -\varepsilon(A_1 + A_2)(\dot{p} - qr), \\ &\dot{\sigma} = -\dot{r}, \end{aligned} \qquad (17)$$

где $a = \dfrac{C_1 - A_1 + C_2 - A_2}{A_1 + A_2}$, $b = \dfrac{C_1}{A_1 + A_2}$ – безразмерные параметры.

Перейдем от экваториальных угловых скоростей к переменным типа “амплитуда–фаза” G и F с помощью следующей замены:

$$p = G(t)\cos F(t), \quad q = G(t)\sin F(t). \qquad (18)$$

Динамические уравнения (17) с точностью порядка ε перепишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{G} = -\varepsilon r^2 \cos F, \\ &\dot{F} = -(ar + b\sigma) - \frac{\varepsilon[G^2 - r^2]\sin F}{G}, \\ &\dot{r} = \frac{\varepsilon(A_1 + A_2)}{C_2} G[r + (ar + b\sigma)]\cos F, \\ &\dot{\sigma} = -\dot{r}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Решения порождающей системы уравнений ($\varepsilon = 0$) имеют вид:

$$\begin{aligned} &\bar{G} = \frac{K\sin\theta_0}{A_1 + A_2}, \quad \bar{F} = \omega t + \varphi_0, \\ &\bar{r} = r_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma_0, \end{aligned} \qquad (20)$$

где $\omega = r_0 - \dfrac{K}{A_1 + A_2}\cos\theta_0 = r_0 - \dfrac{K_z}{A_1 + A_2} = r_0 - \dfrac{C_1\sigma_0 + (C_1 + C_2)r_0}{A_1 + A_2} = -ar_0 - b\sigma_0$

Используя теорему Пуанкаре [7], будем искать решения возмущенной системы (19) в виде следующих разложений, ограничиваясь двумя членами асимптотического ряда:

$$\begin{aligned} &G(t) = \bar{G} + \varepsilon g(t), \quad F(t) = \bar{F} + \varepsilon f(t), \\ &\sigma(t) = \bar{\sigma} + \varepsilon\Sigma(t), \quad r(t) = \bar{r} + \varepsilon R(t), \\ &\delta(t) = \bar{\delta} + \varepsilon\Delta(t), \quad \dot{\Delta} = \Sigma, \end{aligned} \qquad (21)$$

где $\bar{\delta} = \sigma_0 t + \delta_0$, а $g(t)$, $f(t)$, $R(t)$, $\Sigma(t)$, $\Delta(t)$ – подлежащие нахождению функции.

Подставляя выражения (21) в возмущенную систему (19) и приравнивая члены порядка ε, получим систему уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned} &\dot{g} = -r_0^2\cos(\omega t + \varphi_0), \\ &\dot{f} = -(aR + b\Sigma) - \frac{\bar{G}^2 - r_0^2}{\bar{G}}\sin(\omega t + \varphi_0), \\ &\dot{R} = \frac{A_1 + A_2}{C_2}\bar{G}[r_0 - \omega]\cos(\omega t + \varphi_0), \\ &\dot{\Sigma} = -\frac{A_1 + A_2}{C_2}\bar{G}[r_0 - \omega]\cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \qquad (22)$$

Следуя [7], получим решение системы (22) при нулевых начальных значениях малых возмущений:

$$\begin{aligned} &g(t) = -\frac{r_0^2}{\omega}[\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin\varphi_0], \\ &f(t) = \gamma t + \beta[\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos\varphi_0], \\ &R(t) = \alpha(\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin\varphi_0), \\ &\Sigma(t) = -\alpha(\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin\varphi_0), \end{aligned} \qquad (23)$$

где

$$\alpha = \frac{A_1 + A_2}{C_2\omega}\bar{G}[r_0 - \omega],$$

$$\beta = -\frac{1}{\omega}\left\{\frac{A_1 + A_2}{C_2\omega}\bar{G}[r_0 - \omega](b - a) - \frac{\bar{G}^2 - r_0^2}{\bar{G}}\right\},$$

$$\gamma = \alpha\sin\varphi_0(a - b).$$

Из выражений (23) и (21) следует зависимость от времени для переменных “амплитуда–фаза”, а также угловых скоростей r и σ системы соосных тел с малой асимметрией.

С точностью порядка ε зависимости для экваториальных угловых скоростей можно записать:

$$p(t) = \bar{G}\cos\bar{F} + \varepsilon P(t), \quad q(t) = \bar{G}\sin\bar{F} + \varepsilon Q(t), \qquad (24)$$

где

$$P(t) = g\cos\bar{F} - \\ -\bar{G}(\beta[\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos\varphi_0] + \gamma t)\sin\bar{F},$$

$$Q(t) = g\sin\bar{F} + \\ +\bar{G}(\beta[\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos\varphi_0] + \gamma t)\cos\bar{F}.$$

Перейдем к определению зависимостей для углов Эйлера, которые будем искать в виде следующих разложений по малому параметру ε:

$$\psi = \bar{\psi} + \varepsilon\Psi(t), \quad \theta = \bar{\theta} + \varepsilon\Theta(t), \\ \varphi = \bar{\varphi} + \varepsilon\Phi(t). \tag{25}$$

Порождающие решения $(\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ определяются зависимостями (9) с учетом того, что момент внутреннего взаимодействия тел равен нулю ($M = 0$). Подставляя разложения (25) и полученные зависимости для угловых скоростей в уравнения Эйлера (7), приравнивая члены порядка ε, получим кинематические уравнения первого приближения:

$$\dot{\Psi} = -\frac{K\cos\bar{\theta}}{(A_1 + A_2)\sin\theta}\Theta + \frac{1}{\sin\theta}[P\sin\bar{\varphi} + Q\cos\bar{\varphi}],$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{K\sin\bar{\theta}}{A_1 + A_2}\Phi + P\cos\bar{\varphi} - Q\sin\bar{\varphi}, \tag{26}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{K}{(A_1 + A_2)\sin\bar{\theta}}\Theta - \operatorname{ctg}\bar{\theta}[P\sin\bar{\varphi} + Q\cos\bar{\varphi}].$$

Отдельно проинтегрируем последние два уравнения неоднородной линейной системы уравнений (26). Воспользуемся формулой Коши [8]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{M}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{M}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{M}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds, \tag{27}$$

где $\mathbf{y}(t)$ – общее решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений $L(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(t)$, L – линейный дифференциальный оператор, t_0 – начальное значение независимой переменной, $\mathbf{y}_0$ – вектор начальных значений искомых функций, $\mathbf{M}(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, а $\mathbf{f}(t)$ – вектор возмущающих функций.

Окончательно запишем решения для малых возмущений углов нутации и собственного вращения при нулевых начальных значениях:

$$\begin{bmatrix}\Theta(t)\\ \Phi(t)\end{bmatrix} = \mathbf{M}(t)\int_0^t\mathbf{M}^{-1}(s)\begin{bmatrix}f^{\Theta}(s)\\ f^{\Phi}(s)\end{bmatrix}ds, \tag{28}$$

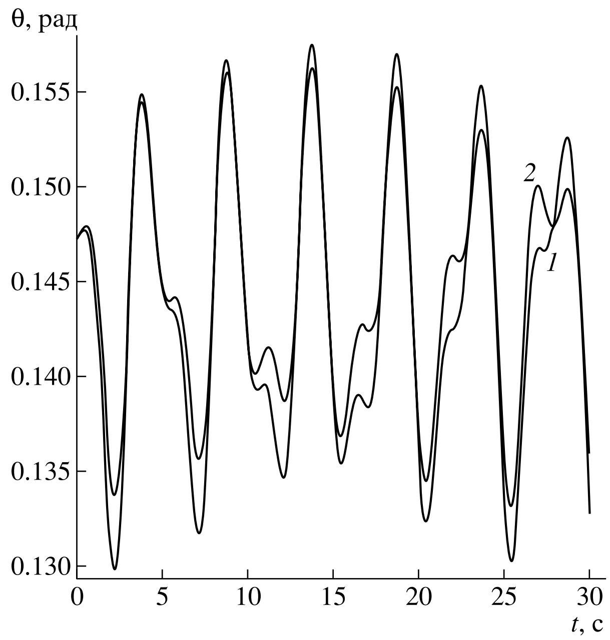

Рис. 4. Сравнение результатов расчета угла нутации: *1* – численное интегрирование, *2* – приближенная аналитическая зависимость.

где

$$f^{\Theta} = P\cos\bar{\varphi} - Q\sin\bar{\varphi}, \\ f^{\Phi} = -\operatorname{ctg}\bar{\theta}[P\sin\bar{\varphi} + Q\cos\bar{\varphi}]$$

– известные возмущающие функции, а

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} -\sin\bar{\theta}\sin\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right|t & \sin\bar{\theta}\cos\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right|t \\ \cos\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right|t & \sin\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right|t \end{bmatrix}$$

– фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы.

Если в первое из уравнений (26) подставить зависимость от времени возмущения угла нутации, следующего из (28), то возмущение угла прецессии $\Psi(t)$ определится интегрированием:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sin\theta_0}\times \\ \times\int_0^t\left(-\frac{K\cos\theta_0}{(A_1 + A_2)}\Theta(t) + P(t)\sin\bar{\varphi} + Q(t)\cos\bar{\varphi}\right)dt.$$

Приведем результаты расчета угла нутации $\theta(t)$ (рис. 4) по приближенным аналитическим зависимостям (28), (25), а также с помощью численного интегрирования, полученные при следующих начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах системы:

$$m_1 = 15 \text{ кг}, \quad m_2 = 30 \text{ кг},$$

$$l = 0.4 \text{ м}, \quad d = 0.01 \text{ м}$$

$$A_1 = 2 \text{ кг м}^2, \quad A_2 = 1.5 \text{ кг м}^2,$$

$$C_1 = 1.2 \text{ кг м}^2, \quad C_2 = 1.3 \text{ кг м}^2,$$

$$p_0 = 0.3 \text{ рад/с}, \quad q_0 = 0.2 \text{ рад/с},$$

$$r_0 = 1.1 \text{ рад/с}, \quad \sigma_0 = 5 \text{ рад/с}.$$

При указанных численных значениях малый параметр имеет величину $\varepsilon = 0.01$.

Полученные результаты позволяют проводить анализ движения спускаемых аппаратов с частичной закруткой, а так же выбирать начальные условия движения и инерционно-массовые параметры подобных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ярошевский В.А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
2. *Асланов В.С., Мясников С.В.* Устойчивость нелинейных резонансных режимов давления космического аппарата в атмосфере // Космич. исслед. 1996. Т. 34. Вып. 6.
3. *Асланов В.С., Прошлецов А.И.* Движение космического аппарата с малыми грузами, закрепленными на разматывающихся нитях // Труды XXX Чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. М., 1996. С. 59–63.
4. *Нейштадт А.И., Пивоваров М.Л.* Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 5.
5. *Механика.* Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников / Под редакцией Белецкого В.В. М.: Мир, 1975.
6. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972.
7. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
8. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд. технико-теоретической лит-ры, 1949.