



Плоское угловое движение космического аппарата с гравитационным демпфером на круговой орбите

- А. В. Дорошин** | доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара; email: doran@inbox.ru
- А. В. Алексеев** | кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара; email: alexeeff05@mail.ru

Исследуется движение космического аппарата с гравитационной системой ориентации и стабилизации относительно центра масс в плоскости своей круговой орбиты. Космический аппарат содержит внутри себя тело-демпфер, обладающий трёхосным эллипсоидом инерции, но геометрически имеющий сферическую форму. Взаимодействие корпуса космического аппарата и тела-демпфера осуществляется через тонкий слой смазочной жидкости известной кинематической вязкости. Строится математическая модель плоского движения системы под действием на оба тела (корпус и демпфер) гравитационного момента. Численно и аналитически доказывается диссипативное влияние демпфера, заключающееся в уменьшении со временем амплитуды колебаний. На основании результатов численных расчётов и приближённых аналитических решений, полученных на основании асимптотических методов, для случая малых колебаний осуществляется оценка времени гашения колебаний.

Ключевые слова: гравитационная система ориентации и стабилизации; гравитационный демпфер; диссипация; колебания; интеграл энергии; метод Ван-дер-Поля

Цитирование: Дорошин, А. В. Плоское угловое движение космического аппарата с гравитационным демпфером на круговой орбите / А. В. Дорошин, А. В. Алексеев // Динамика и виброакустика. – 2025. – Т. 11, №4. – С. 93-103. DOI: 10.18287/2409-4579-2025-11-4-93-103

Введение

Одной из наиболее распространенных систем ориентации и стабилизации (СОС) является гравитационная СОС, представляющая собой пассивный метод ориентации космического аппарата (КА), при котором для поддержания нужного положения и предотвращения вращательных движений используются гравитационные силы планеты. Подобные СОС применялись и применяются на таких КА как аппараты системы «Гонец», большинство аппаратов серии Explorer, OV1-10, GGTS (Gravity Gradient Test Satellite), DODGE, LDEF (Long Duration Exposure Facility) и многие другие. Отличительной особенностью таких КА является протяжённость вдоль одной из осей или наличие выдвинутой (или стационарной) штанги с небольшим грузом на конце. Доказано [1, 2, 3], что орбитальное движение КА с гравитационной СОС будет устойчивым, если его ось с наименьшим моментом инерции (будем называть данную ось продольной) сонаправлена с местной вертикалью (направлена к центру Земли). При наличии начального отклонения (и/или остаточной небольшой угловой скорости)

продольной оси от местной вертикали КА совершает колебательные движения, которые в большинстве случаев негативно влияют на качество функционирования КА и требуют гашения. В случае «больших» колебаний (или вращений) обычно применяются активные системы демпфирования, т.е. используются двигатели. В некоторых случаях (особенно для «малых» колебаний) амплитуда гасится по «естественным» причинам: проявляются диссипативные свойства вязких жидкостей (технологические жидкости в баках КА), трение между элементами конструкции, остаточные аэродинамические эффекты (подходит для низких орбит).

Для более быстрого гашения колебаний предлагается применение гравитационного демпфера, представляющего собой трёхосное (в инерциальном смысле) твёрдое тело (может быть отдельным прибором), заключённое в сферическую оболочку, которая в свою очередь помещается в сферическую полость КА несколько большего радиуса (для наличия зазора). Зазор между сферами заполнен вязкой жидкостью. Достаточно большое количество работ, например [4, 5, 6], посвящено исследованиям движения КА, содержащих сферические в геометрическом и инерциальном смыслах демпферы.

В настоящей работе рассматривается плоское орбитальное движение КА с трёхосным демпфером под действием гравитационных сил Земли.

1 Математическая модель

Будем рассматривать исследуемый КА как механическую систему, состоящую из основного (несущего) тела и демпфера, представляющего собой произвольное твёрдое тело, заключённое в сферическую оболочку и расположенное внутри несущего тела. Центры масс несущего тела и демпфера совпадают. Уравнения трёхмерного движения КА с демпфером относительно центра масс в случае круговой орбиты построены в работах [7, 8] и легко преобразуются для случая плоского движения:

$$\begin{cases} B\ddot{\theta} = 3\omega_0^2(A-C)(-\sin\theta) - \nu(\dot{\theta} - \dot{\psi}); \\ B'\ddot{\psi} = 3\omega_0^2(A'-C')(-\sin\psi) - \nu(\dot{\psi} - \dot{\theta}), \end{cases} \quad (1)$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции несущего тела ($B > A > C$); A', B', C' – главные центральные моменты инерции демпфера ($B' > A' > C'$); ω_0 – орбитальная скорость; ν – кинематическая вязкость жидкости смазочного слоя, заполняющей зазор между оболочкой демпфера и полостью в несущем теле; θ – угол между местной (локальной) вертикалью и продольной осью КА; ψ – угол между местной вертикалью и продольной осью демпфера (рисунок 1).

Аналитическое изучение движения на базе уравнений (1) стеснено их существенной нелинейностью и на текущем этапе исследований не рассматривается. В этой связи в работе осуществляется численно-аналитическое изучение движения на основе упрощённых уравнений. Стоит здесь отметить, что уравнения (1) соответствуют по своей сути динамической системе двух связанных физических маятников, взаимовлияющих друг на друга посредством вязких сил жидкостного трения. Разноплановая динамика движения подобных систем физических маятников рассматривалась ранее в аспектах как теоретического, так и экспериментального изучения свойств нелинейного поведения, амплитудно-частотного анализа, синхронизации и хаотизации динамики [9-18]. Вместе с тем, маятниковая система (1) имеет свои динамические особенности и важна с точки зрения прикладных разработок технических подсистем диссипации энергии (демпферов) и пространственной стабилизации космических аппаратов.



Рисунок 1 – Схема КА с гравитационным демпфером

В этой связи актуальной технической задачей становится не просто анализ колебательных свойств маятниковых систем как таковых, а оценка эффективности демпфирования в применении к оценке длительности выполнения гашения угловых колебаний КА в окрестности гравитационного равновесия на орбите.

Численное интегрирование системы (1) при параметрах, приведённых в таблице 1, показывает (рисунок 2), что примерно за 3,5 суток (43 витка) амплитуда колебаний КА уменьшается на 10 %, а демпфера – на 60 %. На рисунке 3 представлены фазовые портреты, которые также подтверждают уменьшение амплитуд колебаний несущего тела и демпфера.

Таблица 1 – Характеристики механической системы

Моменты инерции, кг м ²	$A = 300, B = 350, C = 20,$ $A' = 20, B' = 25, C' = 10$
Орбитальная скорость, с ⁻¹	0,0009
Кинематическая вязкость жидкости смазочного слоя, м ² /с	0,00022
Начальные условия	$\theta_0 = 0,1 \text{ рад}, \dot{\theta}_0 = 0 \text{ рад/с},$ $\psi_0 = -0,01 \text{ рад}, \dot{\psi}_0 = 0 \text{ рад/с}$

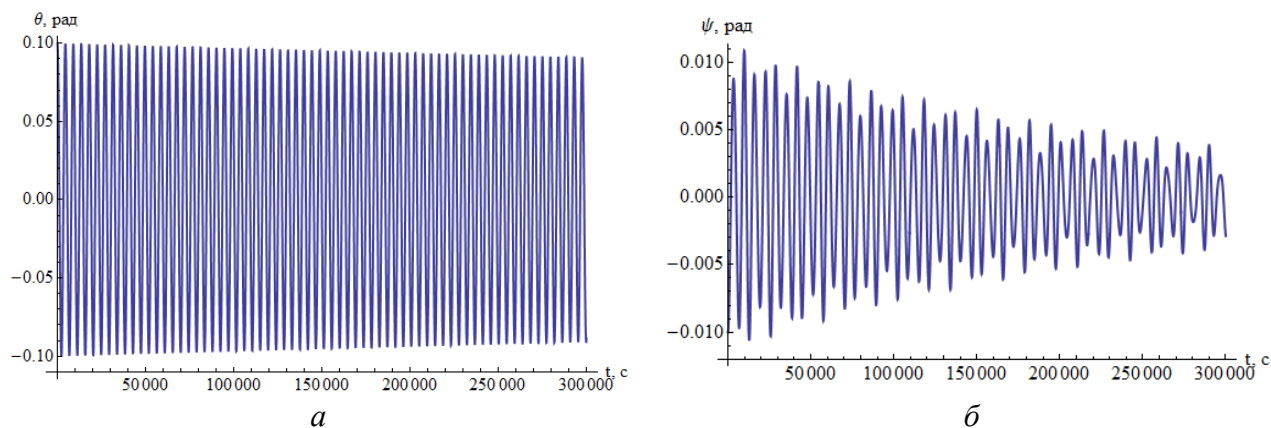


Рисунок 2 – Зависимость угла отклонения от вертикали: *a* – основного тела КА; *б* – тела-демпфера

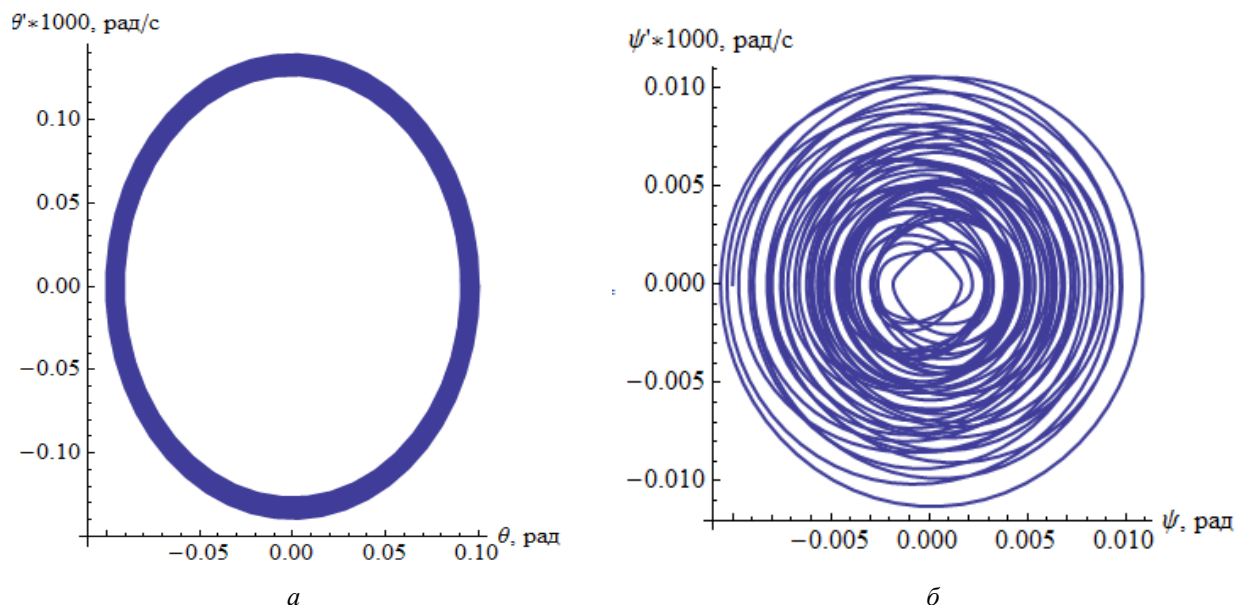


Рисунок 3 – Фазовый портрет в пространстве угла отклонения от вертикали и соответствующей угловой скорости: *a* – основного тела КА; *б* – тела-демпфера

Уравнения (1) допускают наличие первого интеграла:

$$T + \Pi = E_0 + W, \tag{2}$$

где $T = \frac{B\dot{\theta}^2}{2} + \frac{B'\dot{\psi}^2}{2}$ – кинетическая энергия, $\Pi = -3\omega_0^2(A - C)\cos\theta - 3\omega_0^2(A' - C')\cos\psi$ – потенциальная энергия, E_0 – Полная начальная механическая энергия системы (постоянная интегрирования), $W = -\nu \int (\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 dt$ – работа диссипативных моментов, возникающих от вязкого трения в смазочном слое при взаимном движении несущего тела и демпфера.

Учитывая, что величина W не может быть положительной, по выражению (2) видно, что со временем полная механическая энергия системы уменьшается, что аналитически подтверждает диссипативные свойства демпфера, доказывая тем самым уменьшение амплитуды колебаний КА.

2 Приближённое аналитическое решение

Численное интегрирование, безусловно, даёт оценку времени затухания колебаний для одного конкретного набора инерционно-массовых характеристик системы и начальных условий. Вместе с тем, важно синтезировать некий аналитический способ оценки длительности затухания колебаний. Например, в этих интересах можно воспользоваться интегралом энергии. Интеграл энергии (2) позволяет сделать качественный вывод об уменьшении амплитуды колебаний со временем, но не позволяет оценить время затухания для различных параметров и начальных условий движения системы. Определение аналитического решения системы уравнений (1), которое позволило бы проводить качественный и количественный анализ, существенно затрудняется их нелинейностью. Рассмотрим случай, когда вращение и/или «большие» колебания КА с помощью специальных средств (в т.ч. двигателями ориентации, выдвиганием штанги стабилизации и т.п.) сведены к малым колебаниям в окрестности гравитационного положения равновесия в рамках выполнения так называемого предварительного понижения амплитуд колебаний. Для данного случая является правомерной замена синусов углов в (1) на их радианную меру. Такая замена вызывает погрешность не более 1%, если

величина угла не превышает 15 градусов. Другими словами, в этих условиях можно перейти к линеаризованным уравнениям.

В случае малых колебаний КА и демпфера уравнения движения системы примут вид:

$$\begin{cases} B\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} - \nu\dot{\psi} + 3\omega_0^2(A-C)\theta = 0; \\ B'\ddot{\psi} - \nu\dot{\theta} + \nu\dot{\psi} + 3\omega_0^2(A'-C')\psi = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения (3) представляют собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений общего четвёртого порядка. Для построения решения системы (3) необходимо решить характеристическое уравнение:

$$(B\lambda^2 + \nu\lambda + 3\omega_0^2(A-C))(B'\lambda^2 + \nu\lambda + 3\omega_0^2(A'-C')) - \nu^2\lambda^2 = 0. \quad (4)$$

Уже даже в рассматриваемом линеаризованном случае получить завершённое аналитическое решение данного уравнения не представляется возможным, так как не известны строгие явные зависимости для корней (4) из-за отсутствия методов решения алгебраических уравнений четвёртой степени с общим набором значений параметров. По этой причине мы, к сожалению, не достигнем явных соотношений, связывающих амплитудно-частотные свойства решений с параметрами системы. В этой связи, корни уравнения (4) придётся искать численно. При некоторых гипотетических значениях параметров, заданных в таблице 1, корнями характеристического уравнения будут две пары комплексно-сопряжённых чисел:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0,314 \times 10^{-6} \pm 0,139 \times 10^{-2} i; \\ \lambda_{3,4} &= -4,40 \times 10^{-6} \pm 0,099 \times 10^{-2} i. \end{aligned}$$

Отрицательная действительная часть полученных корней указывает на то, что колебания КА и демпфера носят затухающий характер. Амплитуда первого «главного» колебания (соответствующего корням $\lambda_{1,2}$) уменьшится на 10 % примерно через 3,8 суток (соответствует анализу графика на рисунке 2), а в 2 раза – примерно через 25,5 суток. Амплитуда второго «главного» колебания (для $\lambda_{3,4}$) уменьшится в 2 раза через 1,8 суток, а на 60 % – приблизительно через 2,4 суток (примерно соответствует анализу графика на рисунке 3).

Серия численных экспериментов показала, что в достаточно большом диапазоне параметров системы (с отклонениями от значений, приведённых в таблице 1) корнями характеристического уравнения (4) являются пары комплексно-сопряжённых чисел с отрицательными действительными частями. Последнее обстоятельство позволяет предпринять попытку использования асимптотического метода, который позволил бы обойти аналитическую неопределённость с корнями уравнения (4).

Для осуществления анализа влияния параметров системы на её движение, в том числе на время затухания, получим приближённое аналитическое решение системы (1) для случая малых колебаний. Учитывая малость кинематической вязкости (ν), уравнения (4) допускают применение асимптотических методов решения. Применим подход Ван-дер-Поля [19]. Введём замены:

$$\theta = \alpha \cos \gamma, \quad \dot{\theta} = -\alpha k \sin \gamma, \quad \psi = \beta \cos \delta, \quad \dot{\psi} = -\beta k_1 \sin \delta, \quad (5)$$

где $k^2 = 3\omega_0^2(A-C)/B$, $k_1^2 = 3\omega_0^2(A'-C')/B'$.

Подставим (5) в (3), понижая порядок каждого уравнения, получим:

$$\begin{cases} -\dot{\alpha}k \sin \gamma - \alpha k \dot{\gamma} + k^2 \alpha \cos \gamma = -v(-\alpha k \sin \gamma + \beta k_1 \sin \delta)/B; \\ \dot{\alpha} \cos \gamma - \alpha \dot{\gamma} \sin \gamma = -\alpha k \sin \gamma; \\ -\dot{\beta}k_1 \sin \delta - \beta k_1 \dot{\delta} \cos \delta + \beta k_1^2 \cos \delta = -v(-\beta k_1 \sin \delta + \alpha k \sin \gamma)/B'; \\ \dot{\beta} \cos \delta - \beta \dot{\delta} \sin \delta = -\beta k_1 \sin \delta. \end{cases}$$

Выразим из полученной системы производные введённых переменных:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{v}{Bk}(-\alpha k \sin \gamma + \beta k_1 \sin \delta) \sin \gamma; \\ \dot{\gamma} = k + \frac{v}{\alpha Bk}(-\alpha k \sin \gamma + \beta k_1 \sin \delta) \cos \gamma; \\ \dot{\beta} = \frac{v}{B'k_1}(-\beta k_1 \sin \delta + \alpha k \sin \gamma) \sin \delta; \\ \dot{\delta} = k_1 + \frac{v}{\beta B'k_1}(-\beta k_1 \sin \delta + \alpha k \sin \gamma) \cos \delta. \end{cases} \quad (6)$$

Выражения (6) показывают, что переменные α и β являются медленными, а переменные γ и δ – быстрыми. Усредним (6) по двум быстрым переменным:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{-\alpha v}{2B}; \\ \dot{\gamma} = k; \\ \dot{\beta} = \frac{-\beta v}{2B'}; \\ \dot{\delta} = k_1. \end{cases} \quad (7)$$

Решая систему (7), получим:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 \exp \frac{-vt}{2B}; \\ \gamma = kt + \gamma_0; \\ \beta = \beta_0 \exp \frac{-vt}{2B'}; \\ \delta = k_1 t + \delta_0, \end{cases} \quad (8)$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{k^2}}$, $\beta_0 = \sqrt{\psi_0^2 + \frac{\dot{\psi}_0^2}{k_1^2}}$, $\gamma_0 = \arctg\left(-\frac{\dot{\theta}_0}{k\theta_0}\right)$, $\delta_0 = \arctg\left(-\frac{\dot{\psi}_0}{k_1\psi_0}\right)$ определяются из начальных условий.

Подставляя (8) в (5) с учётом начальных условий, получим приближённые зависимости углов отклонения КА и демпфера от местной вертикали:

$$\theta = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{k^2}} \exp\left(-\frac{\nu t}{2B}\right) \cos\left(kt + \arctg\left(-\frac{\dot{\theta}_0}{k\theta_0}\right)\right); \quad (9)$$

$$\psi = \sqrt{\psi_0^2 + \frac{\dot{\psi}_0^2}{k_1^2}} \exp\left(-\frac{\nu t}{2B'}\right) \cos\left(k_1 t + \arctg\left(-\frac{\dot{\psi}_0}{k_1\psi_0}\right)\right). \quad (10)$$

На рисунке 4 представлены численное решение системы (1) и приближённое аналитическое решение (9) для угла отклонения КА θ от вертикали. На рисунке 4, а показан начальный этап движения, на котором численное и аналитическое решения практически совпадают; на рисунке 4, б можно увидеть определённое смещение численного и аналитического решений, что вполне характерно для асимптотических методов.

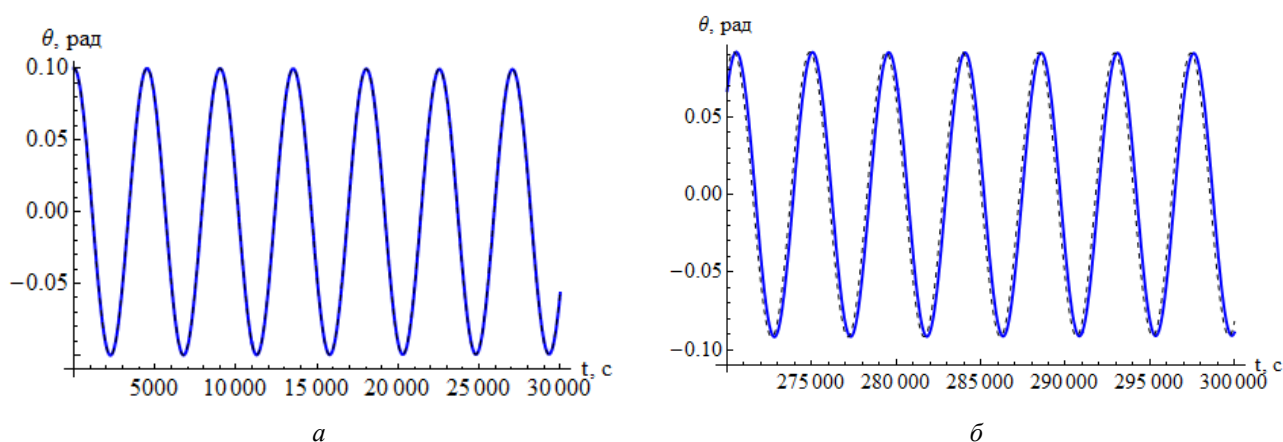


Рисунок 4 – Численная (сплошная линия) и аналитическая (пунктирная линия) зависимости угла отклонения КА от вертикали: а – на начальном этапе движения; б – на удалённом этапе движения

Экспоненциальный характер приближённых решений (9) и (10) также доказывает диссипативное взаимное влияние КА и демпфера при наличии слоя вязкой жидкости между ними. Кроме того, выражения (9) и (10) позволяют проводить качественный и количественный анализ влияния параметров системы и начальных условий на движение КА и демпфера в случае их малых колебаний. Например, время уменьшения амплитуды колебаний КА в 2 раза $T_{1/2}$ определяется из (9) и составляет:

$$T_{1/2} = 2B \ln 2 / \nu. \quad (11)$$

Для параметров, приведённых в таблице 1, это время составляет около 25,5 суток (или 316 витков), что подтверждается численными расчётами, проделанными выше.

По такому же принципу определяется время затухания T_k колебаний до некоторого заданного уровня амплитуды α_k :

$$T_k = \frac{2B}{\nu} \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_k}. \quad (12)$$

Например, для уменьшения амплитуды в 10 раз потребуется около 84,8 суток.

Заключение

В работе рассмотрено плоское движение космического аппарата с демпфером на круговой орбите. Про моделирована динамика углового движения, и в асимптотическом линейном приближении получена аналитическая оценка времени уменьшения исходной амплитуды колебаний основного тела КА до требуемого ограничения конечной амплитуды колебаний. Оценка проверена численным путём, что показало ошибку оценки с точностью не ниже 1 % для амплитуд менее 15^0 . Построение указанной аналитической оценки потребовало преобразования уравнений малых колебаний около гравитационного положения равновесия КА с последующим применением асимптотического метода Ван дер Поля.

Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности учёта выявленных динамических эффектов в рамках синтеза параметров пассивных и активных демпфирующих подсистем для разрабатываемых и перспективных КА, обеспечивающих эффективное гашение колебательных процессов в их угловом движении и пространственной ориентации. Результаты получены в общем аналитическом виде, что позволяет применять их для совершенствования динамики движения широкого спектра КА, отличающихся по назначению, функционалу, компоновке, инерционно-массовым характеристикам, а также требованиям по точности углового положения на орбите.

Благодарности

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 25-19-00312).

Список использованных источников

1. Черноусько, Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов / Ф. Л. Черноусько // ПММ. – 1963. – Т. 27, Вып. 3. – С. 474-483.
2. Белецкий, В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / В. В. Белецкий. – Москва : Издательство «НАУКА» Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 416 с.
3. Румянцев, В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников / В. В. Румянцев. – Москва : Вычисл. Центр АН СССР, 1967. – 141 с.
4. Черноусько, Ф. Л. О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер / Ф. Л. Черноусько // ПМТФ. – 1968. – № 1. – С. 73–79.
5. Амелькин, Н. И. Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией / Н. И. Амелькин // ПММ. – 2011. – Т. 75, № 2. – С. 204–223.
6. Холощак, В. В. Динамика вращательного движения спутника с демпфером в центральном гравитационном поле / В. В. Холощак // Тр. МФТИ. – 2017. – Т. 9, № 4 (36). – С. 106–119.
7. Doroshin, A. V. Gravitational dampers for unloading angular momentum of nanosatellites / A. V. Doroshin // Advances in Nonlinear Dynamics: Proceedings of the Second International Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2021). V. 1. Cham: Springer International Publishing. – 2022. – P. 257-266. DOI: 10.1007/978-3-030-81162-4_23.
8. Асланов, В. С. Динамика малых спутников с трехосным гравитационным демпфером / В. С. Асланов, А. В. Дорошин // Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, № 5. – С. 729–741.
9. Blackburn, J. A. Driven pendulum for studying chaos / J. A. Blackburn, S. Vik, B. Wu, H. J. T. Smith // Review of scientific instruments. – 1989. – 60(3). – P. 422-426.
10. Smith, H. J. T. Experimental observation of intermittency in coupled chaotic pendulums / H. J. T. Smith, J. A. Blackburn, G. L. Baker // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1999. – 9(10). – P. 1907-1916.
11. Shinbrot, T. Chaos in a double pendulum. / T. Shinbrot, C. Grebogi, J. Wisdom, J. A. Yorke // American Journal of Physics. – 1992. – 60(6). – P. 491-499.
12. Sado, D. Note on chaos in three degree of freedom dynamical system with double pendulum / D. Sado, K. Gajos // Meccanica. – 2003. – 38(6). – P. 719-729.
13. Huynh, H. N. Numerical simulation and geometrical analysis on the onset of chaos in a system of two coupled pendulums / H. N. Huynh, T. P. T. Nguyen, L. Y. Chew // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2013. – 18(2). – P. 291-307.

14. Kim, S. Y. Period doublings in coupled parametrically forced damped pendulums / S. Y. Kim, K. Lee // *Physical Review E*. – 1996. – 54(2). – P. 1237.
15. Gavrielides, A. Spatiotemporal organization of coupled nonlinear pendula through impurities / A. Gavrielides, T. Kottos, V. Kovanis, G. P. Tsironis // *Physical Review E*. – 1998. – 58(5). – P. 5529.
16. Olusola, O. I. Synchronization, multistability and basin crisis in coupled pendula / O. I. Olusola, U. E. Vincent, A. N. Njah // *Journal of sound and vibration*. – 2010. – 329(4). – P. 443-456.
17. Huynh, H. N. Two-coupled pendulum system: bifurcation, chaos and the potential landscape approach / H. N. Huynh, L. Y. Chew // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. – 2010. – 20(08). – P. 2427-2442.
18. Smith, H. J. T. When two coupled pendulums equal one: a synchronization machine / H. J. T. Smith, J. A. Blackburn, G. L. Baker // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. – 2003. – 13(01). – P. 7-18.
19. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. – Москва : Наука, 1969. – 380 с.

Planar angular motion of a spacecraft with a gravitational damper in a circular orbit

A. V. Doroshin | Doctor of Science (D.Sc. in Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; email: doran@inbox.ru

A. V. Alekseev | Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Theoretical Mechanics; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; email: alexeeff05@mail.ru

The motion of a spacecraft with a gravitational attitude control and stabilization system relative to its center of mass in the plane of its circular orbit is studied. The spacecraft contains a damper body, which has a triaxial ellipsoid of inertia but is geometrically spherical. The interaction between the spacecraft body and the damper body occurs through a thin layer of lubricating fluid with known kinematic viscosity. A mathematical model is constructed for the planar motion of the system under the action of a gravitational moment on both bodies (body and damper). The dissipative effect of the damper, consisting of a decrease in oscillation amplitude over time, is demonstrated numerically and analytically. Based on the results of numerical calculations and approximate analytical solutions obtained using asymptotic methods, the oscillation damping time is estimated for the case of small oscillations.

Keywords: gravitational orientation and stabilization system; gravitational damper; dissipation; oscillations; energy integral; Van der Pol method

Citation: Doroshin, A. V. and Alekseev, A. V. (2025), “Planar angular motion of a spacecraft with a gravitational damper in a circular orbit”, *Journal of Dynamics and Vibroacoustics*, vol. 11, no. 4, pp. 93-103. DOI: 10.18287/2409-4579-2025-11-4-93-103. (In Russian; abstract in English)

References

1. Chernous'ko, F. L. (1963), “On the motion of a satellite about its center of mass under the action of gravitational moments”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, vol. 27, no. 3, pp. 474–483. (In Russian)
2. Beletskii, V. V. (1965), *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* [Motion of an Artificial Satellite About its Center of Mass], Nauka, Moscow, Russia. (In Russian)
3. Rumyantsev, V. V. (1967), *Ob ustoychivosti statsionarnykh dvizheniy sputnikov* [On the Stability of Stationary Motions of Satellites], Vychisl. Tsentr AN SSSR, Moscow, Russia. (In Russian)
4. Chernous'ko, F. L. (1968), “On the motion of a rigid body containing a spherical damper”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics (PMTF)*, no. 1, pp. 73–79. (In Russian)
5. Amel'kin, N. I. (2011), “Asymptotic properties of satellite motions in a central field due to internal dissipation”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, vol. 75, no. 2, pp. 204–223. (In Russian)
6. Kholoshchak, V. V. (2017), “Dynamics of rotational motion of a satellite with a damper in a central gravitational field”, *Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology (Tr. MFTI)*, vol. 9, no. 4 (36), pp. 106–119. (In Russian)
7. Doroshin, A. V. (2022), “Gravitational dampers for unloading angular momentum of nanosatellites”, *Advances in Nonlinear Dynamics: Proceedings of the Second International Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2021)*, vol. 1. Cham: Springer International Publishing, pp. 257–266. DOI: 10.1007/978-3-030-81162-4_23.

8. Aslanov, V. S. and Doroshin, A. V. (2023), “Dynamics of small satellites with a three-axis gravitational damper”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, vol. 87, no. 5, pp. 729–741. (In Russian)
9. Blackburn, J. A., Vik, S., Wu, B. and Smith, H. J. T. (1989), “Driven pendulum for studying chaos”, *Review of Scientific Instruments*, vol. 60, no. 3, pp. 422–426.
10. Smith, H. J. T., Blackburn, J. A. and Baker, G. L. (1999), “Experimental observation of intermittency in coupled chaotic pendulums”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 9, no. 10, pp. 1907–1916.
11. Shinbrot, T., Grebogi, C., Wisdom, J. and Yorke, J. A. (1992), “Chaos in a double pendulum”, *American Journal of Physics*, vol. 60, no. 6, pp. 491–499.
12. Sado, D. and Gajos, K. (2003), “Note on chaos in three degree of freedom dynamical system with double pendulum”, *Meccanica*, vol. 38, no. 6, pp. 719–729.
13. Huynh, H. N., Nguyen, T. P. T. and Chew, L. Y. (2013), “Numerical simulation and geometrical analysis on the onset of chaos in a system of two coupled pendulums”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 2, pp. 291–307.
14. Kim, S. Y. and Lee, K. (1996), “Period doublings in coupled parametrically forced damped pendulums”, *Physical Review E*, vol. 54, no. 2, pp. 1237–1244.
15. Gavrielides, A., Kottos, T., Kovanis, V. and Tsironis, G. P. (1998), “Spatiotemporal organization of coupled nonlinear pendula through impurities”. *Physical Review E*, vol. 58, no. 5, pp. 5529–5536.
16. Olusola, O. I., Vincent, U. E. and Njah, A. N. (2010), “Synchronization, multistability and basin crisis in coupled pendula”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 4, pp. 443–456.
17. Huynh, H. N. and Chew, L. Y. (2010), “Two-coupled pendulum system: bifurcation, chaos and the potential landscape approach”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, no. 8, pp. 2427–2442.
18. Smith, H. J. T., Blackburn, J. A. and Baker, G. L. (2003), “When two coupled pendulums equal one: a synchronization machine”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 13, no. 1, pp. 7–18.
19. Moiseev, N. N. (1969), *Asimptoticheskie metody nelineynoy mekhaniki* [Asymptotic Methods in Nonlinear Mechanics], Nauka, Moscow, Russia. (In Russian)